

Résistance des matériaux

Cours et exercices corrigés

La Résistance des matériaux *RDM* est une partie de la mécanique des solides. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes (normale et tangentielle) ainsi que les déplacements des structures.

Cet ouvrage de *RDM* présente des méthodes de calcul, des formules pratiques illustrant des cas réels de dimensionnement des structures. Les nombreuses illustrations de l'ouvrage montrent en détail les éléments de base à prendre en compte lors du dimensionnement d'une structure quelconque en Génie Civil. Les méthodes analytiques les plus utilisées en calcul des systèmes isostatique et hyperstatique sont développées en détail.

À qui s'adresse cet ouvrage ?

- Aux élèves des sections post-baccalauréat de Génie Civil
- DUT : Génie Civil, Génie Mécanique
- BTS : Bâtiment, Travaux publics
- Licence et Maîtrise de Génie Civil
- Aux premières années élèves-ingénieurs
- Aux candidats à la préparation des concours du CAPET, de l'Agrégation de Génie Civil et de l'Agrégation de Génie Mécanique

Sommaire

Notations principales	12
Chapitre 1. Généralités sur la résistance des matériaux	15
1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM	15
1.2. Notion de poutre	15
1.3. Exemples de sollicitations	16
1.3.1. <i>Traction/Compression</i>	16
1.3.2. <i>Cisaillement</i>	17
1.3.3. <i>Flexion</i>	17
1.3.4. <i>Torsion</i>	18

1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps	19
1.4.1. Notion d'appui	19
1.4.2. Appui simple - Appui glissant	19
1.4.3. Appui double - Appui articulé	19
1.4.4. Appui triple - Encastrement	20
1.5. Équilibre d'un corps	21
1.5.1. Équations d'équilibre. Principe fondamental de la statique PFS	21
1.5.2. Différents systèmes mécaniques	21
1.5.2.1. <i>Système astatique - Mécanisme</i>	21
1.5.2.2. <i>Système isostatique</i>	22
1.5.2.3. <i>Système hyperstatique</i>	22
1.5.3. Application	23

1.6. Efforts internes	24
1.6.1. Principe de la coupe - Éléments de réduction	24
1.6.2. Conventions de signe des efforts internes	26
1.6.2.1. Effort normal N_x	26
1.6.2.2. Effort tranchant T_y	26
1.6.2.3. Moment fléchissant M_z	27
1.6.3. Relations entre efforts internes	27
1.6.4. Diagrammes des efforts internes	29
1.6.5. Application	30
1.7. Équation de la déformée	35
1.7.1. Calcul de la flèche et de la rotation	35
1.7.2. Application	35
Chapitre 2. Caractéristiques géométriques des sections planes	37
Introduction	37
2.1. Centre de gravité	37
2.2. Moment statique	38
2.3. Application	39
2.4. Moment d'inertie	40

2.5. Théorème des axes parallèles - Théorème de Huyghens.....	41
2.6. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de translation d'axes	42
2.7. Moment d'inertie et produit d'inertie - Cas de rotation d'axes.....	43
2.8. Application.....	44
Chapitre 3. Sollicitations simples	48
Généralités.....	48
3.1. Traction pure - Compression pure	48
3.1.1. Effet de l'effort normal	50
3.1.1.1. <i>Contrainte normale</i>	50
3.1.1.2. <i>Déformation et déplacement</i>	51
3.1.2. Condition de résistance	52
3.1.3. Application	52
3.2. Cisaillement pur.....	55

3.2.1. Effet de l'effort tranchant	55
3.2.1.1. <i>Contrainte de cisaillement</i>	55
3.2.1.2. <i>Déformation de cisaillement</i>	56
3.2.2. Condition de résistance	57
3.2.3. Application	58
3.3. Flexion pure	59
3.3.1. Effet du moment fléchissant	60
3.3.1.1. <i>Contrainte normale</i>	60
3.3.1.2. <i>Déformation normale</i>	62
3.3.2. Condition de résistance	63
3.3.3. Application	64
3.4. Torsion pure	65
3.4.1. Torsion d'une barre circulaire	66
3.4.1.1. <i>Observations expérimentales</i>	66
3.4.1.2. <i>Effet du moment de torsion</i>	67
3.4.2. Torsion d'une barre rectangulaire	69
3.4.3. Condition de résistance	71
3.4.4. Application	71

Chapitre 4. Sollicitations composées	73
Généralités	73
4.1. Flexion plane	74
4.1.1. Contrainte normale	75
4.1.2. Contrainte de cisaillement	75
4.1.3. Application	77
4.1.4. Calcul de la résistance	78
4.1.5. Calcul de la rigidité	79
4.1.6. Application	79
4.2. Flexion déviée	82
4.2.1. Contrainte normale	83
4.2.2. Contrainte de cisaillement	84
4.2.3. Calcul de la résistance	84
4.2.4. Calcul de la rigidité	85
4.2.5. Application	86

4.3. Flexion composée	88
4.3.1. Contrainte normale	89
4.3.2. Contrainte de cisaillement	90
4.3.3. Calcul de la résistance	90
4.3.4. Calcul de la rigidité	90
4.3.5. Application	91
4.4. Flexion-torsion	95
4.4.1. Contrainte normale	95
4.4.2. Contrainte de cisaillement	96
4.4.3. Calcul de la résistance	96
4.4.4. Application	97
 Chapitre 5. Systèmes isostatiques à treillis	 99
Généralités	99
5.1. Système à treillis	100
5.1.1. Détermination du degré d'hyperstaticité	100
5.1.2. Exemple	101
5.2. Calcul des efforts normaux - Méthode des sections	102

5.3. Déplacement d'un système à treillis	103
5.4. Application - Étude d'une ferme	103
Chapitre 6. Systèmes hyperstatiques	106
Généralités	106
6.1. Poutres continues	106
6.1.1. <i>Méthode des trois moments - Formules de Clapeyron</i>	106
6.1.2. <i>Relations entre efforts internes et moments aux appuis</i>	108
6.1.3. <i>Application - Étude d'une poutre reposant sur quatre appuis</i>	109
6.2. Méthode des déplacements	114
6.2.1. <i>Principe de la méthode</i>	114
6.2.2. <i>Barres soumises à des charges</i>	116
6.2.3. <i>Application - Étude d'un portique</i>	120
Bibliographie	125

Chapitre 1

Généralités sur la résistance des matériaux

1.1. Objectifs de la résistance des matériaux RDM

La RDM est une partie de la mécanique des solides déformables. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes ainsi que les déplacements et les rotations des structures.

1.2. Notion de poutre

Les notions abordées dans ce chapitre ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre (figure 1.1.), c'est-à-dire un solide pour lequel :

- il existe une ligne moyenne l_m , continue, passant par les centres de gravité des sections du solide ;
- la longueur L est supérieure ou égale à 5 fois le diamètre D ;
- il n'existe pas de défauts de variation de section (trous, épaulements) ;
- le solide admet un seul et même plan de symétrie pour le chargement et la géométrie.

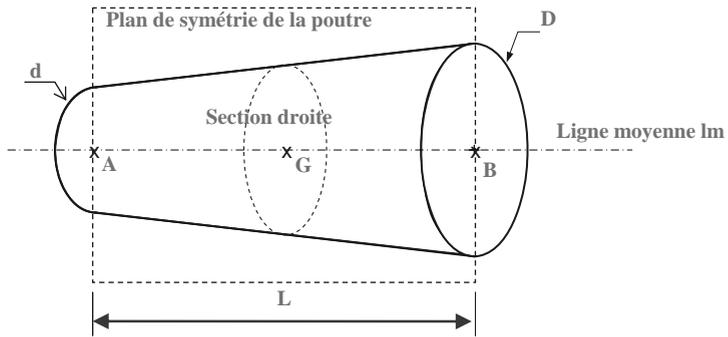


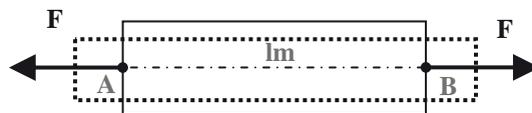
Figure 1.1. Élément de poutre

1.3. Exemples de sollicitations

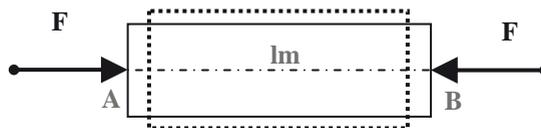
Ces exemples de sollicitations seront traités, en détail, dans le *chapitre 3*.

1.3.1. Traction/Compression

Une poutre est sollicitée en **traction** (ou en **compression**) lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées, portées par la ligne moyenne *lm*.



(a). Traction (allongement)



(b). Compression (rétrécissement)

Figure 1.2. Traction/compression : (a). Traction, (b). Compression

1.3.2. Cisaillement

La direction du chargement est perpendiculaire à la ligne moyenne lm de la poutre, figure 1.3.

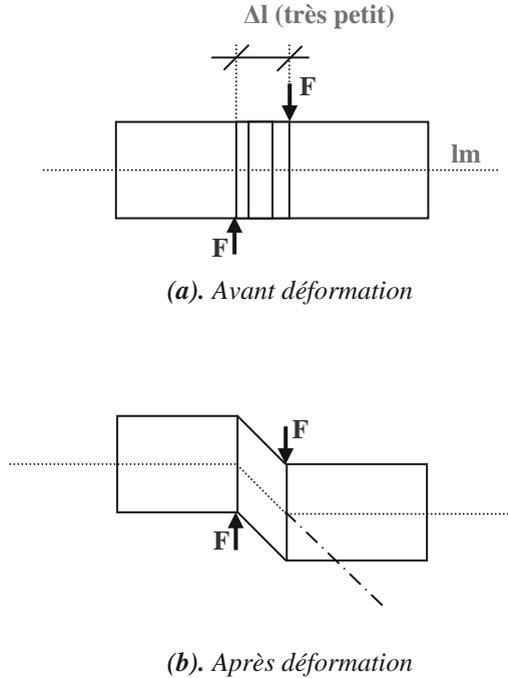
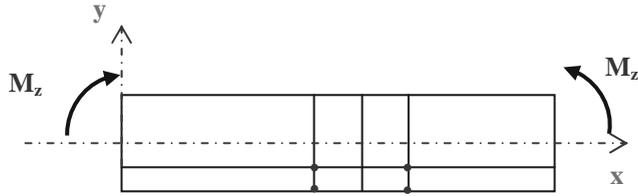


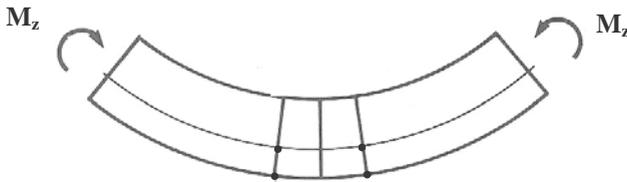
Figure 1.3. Cisaillement pur : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

1.3.3. Flexion

Le chargement est un moment autour l'axe Z . Le moment M_z est appelé **moment fléchissant**.



(a). Avant déformation



(b). Après déformation

Figure 1.4. Flexion pure : (a). Avant déformation, (b). Après déformation

1.3.4. Torsion

Une poutre est sollicitée en *torsion* lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments de torsion M_t *égaux* et *opposés*, portés par la ligne moyenne lm .

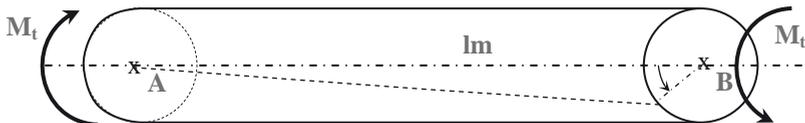


Figure 1.5. Torsion d'une barre circulaire

1.4. Conditions aux limites - Fixation des corps

1.4.1. Notion d'appui

Un appui est un élément extérieur en contact avec la structure étudiée et la réaction d'appui dépend de la nature de la liaison appui-structure.

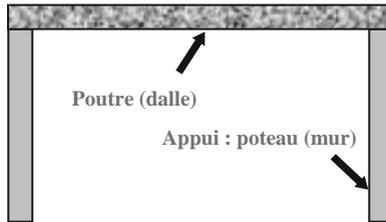


Figure 1.6. Notion d'appui

1.4.2. Appui simple - Appui glissant

Un contact ponctuel avec la structure (figure 1.7.) :

- une inconnue (réaction verticale) ;
- deux degrés de liberté dll (un déplacement suivant x et une rotation).



Figure 1.7. Appui simple

1.4.3. Appui double - Appui articulé

- Deux inconnues (réactions verticale et horizontale) ;
- un dll (une rotation).

3.1.2. Condition de résistance

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{A} \leq \bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_e}{s} \quad [3.8.]$$

σ_{\max} : contrainte maximale en MPa ;

$\bar{\sigma}_a$: résistance admissible du matériau en MPa ;

σ_e : résistance élastique du matériau en MPa ;

s : coefficient de sécurité.

3.1.3. Application

Calculer les contraintes et les allongements subis par chacune des barres supportant le corps rigide de section constante et de masse de 3 000 kg.

Les caractéristiques des barres sont :

- Barre (1) : $E_1 = 70\,000$ MPa ; $A_1 = 240$ mm²
- Barre (2) : $E_2 = 210\,000$ MPa ; $A_2 = 180$ mm²

Les barres (1) et (2) sont soumises à une traction sous l'effet du poids du bloc.

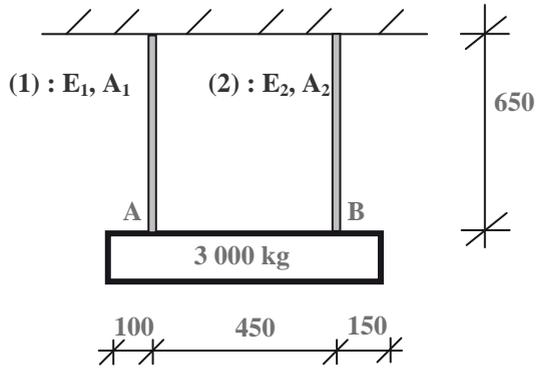


Figure 3.4. Bloc suspendu. Dimensions en mm

On isole le bloc des deux barres (1) et (2).

- On remplace les coupures par des efforts internes (et les efforts extérieurs).
- On vérifie l'équilibre (PFS), on détermine les inconnues du problème.

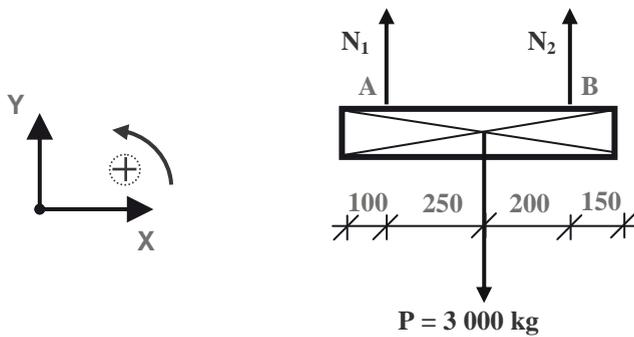


Figure 3.5. Modèle mécanique. Dimensions en mm

Équations d'équilibre :

$$\sum M_{/A} = -P \times 250 + N_2 \times 450 = 0 \Rightarrow N_2 = 1666,67 \text{ kg}$$

$$\sum M_{/B} = P \times 200 - N_1 \times 450 = 0 \Rightarrow N_1 = 1333,33 \text{ kg}$$

$$\text{Vérifiant : } N_1 + N_2 = P \Rightarrow 1333,33 + 1666,67 = 3000 \text{ kg}$$

Contraintes dans les barres :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{13333,3}{240} = 55,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{16666,7}{180} = 92,59 \text{ MPa}$$

Allongements dans les barres :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{13333,3 \times 650}{70000 \times 240} = 0,52 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{16666,7 \times 650}{210000 \times 180} = 0,28 \text{ mm}$$