

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

1. LA FLEXION SIMPLE

2. LA TORSION SIMPLE

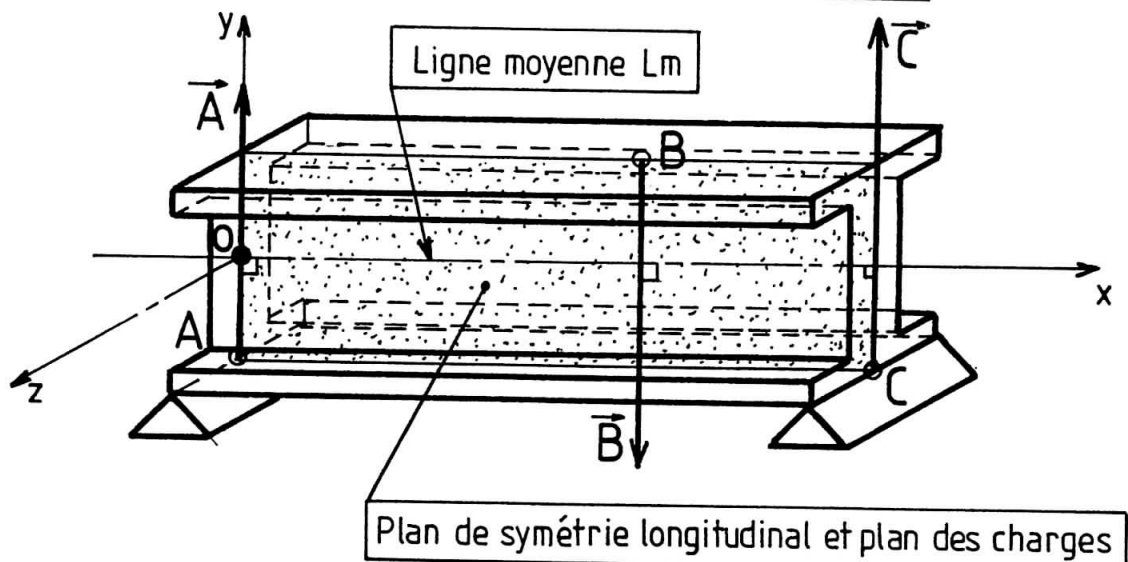
1

LA FLEXION SIMPLE

1. GENERALITES

Nota : Il y a sollicitation de **flexion**, chaque fois qu'il y a fléchissement de la ligne moyenne L_m .

HYPOTHESES PARTICULIERES A LA FLEXION



La ligne moyenne L_m de la poutre est **rectiligne**.

Cette ligne moyenne définit l'axe (O, x) .

La poutre admet un plan de symétrie longitudinal soit : (O, x, y) .

Toutes les actions appliquées à la poutre sont :

- Perpendiculaires à la ligne moyenne L_m .
- Situées dans le plan de symétrie longitudinal ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci.

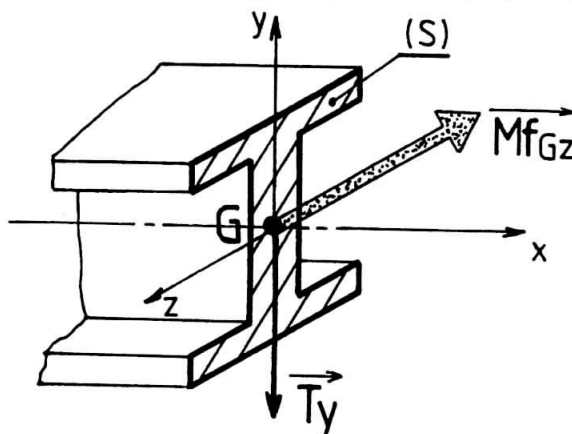
En conclusion :

Toutes les résultantes des actions mécaniques sont **parallèles** à (O, y) .

Concentrées en un point ou **uniformément réparties** sur toute la longueur de la poutre.

DEFINITION DE LA SECTION PLANE

Soit (G, x, y, z) le repère des sollicitations dans une section droite fictive (S) .



Les éléments de réduction en G étant :

$$N = 0 ; T_z = 0 ; T_y \neq 0$$

T_y : Effort tranchant

$$M_t = 0 ; M_{f_{Gy}} = 0 ; M_{f_{Gz}} \neq 0$$

$M_{f_{Gz}}$: Moment fléchissant

1

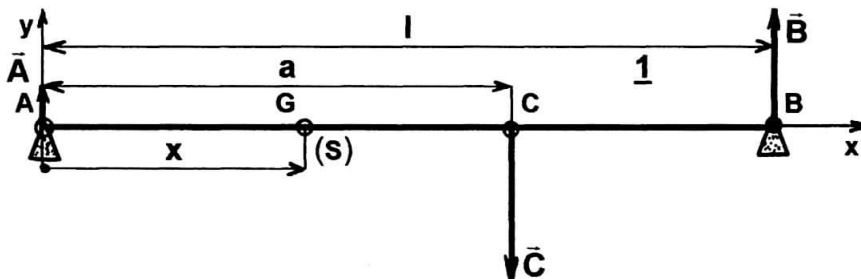
LA FLEXION SIMPLE

2. POUTRE SUR 2 APPUIS - CHARGES CONCENTREES

EFFORT TRANCHANT T_y

Exemple :

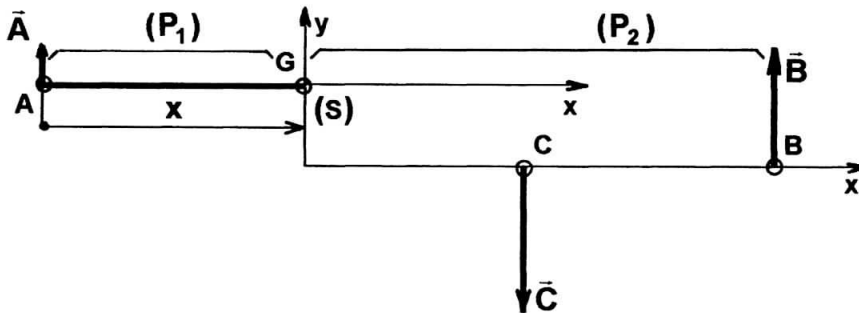
On considère une poutre 1 modélisée par sa ligne moyenne Ax . Les actions mécaniques extérieures appliquées à la poutre 1 se réduisent à **trois actions** en **A, B, C** dont les résultantes \bar{A} , \bar{B} et \bar{C} sont parallèles.



La poutre est en équilibre sous l'action de 3 forces \bar{A} , \bar{B} et \bar{C} .

$$\boxed{\|\bar{A}\| - \|\bar{C}\| + \|\bar{B}\| = 0} \quad \bar{A}, \bar{C} \text{ et } \bar{B} \text{ connues ou à déterminer}$$

On considère une section droite (S) de 1 repérée par l'abscisse x de son centre G.



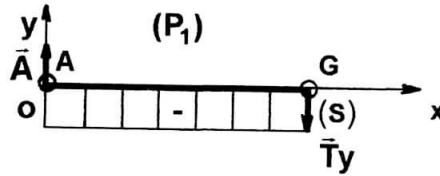
Les 2 tronçons (P_1) et (P_2) sont en équilibre :

$$\bar{\Sigma}_{\text{Act.ext}} = \vec{0} \text{ (1)} \quad ; \quad \bar{\Sigma}M_{\text{Act.ext}} = \vec{0} \text{ (2)}$$

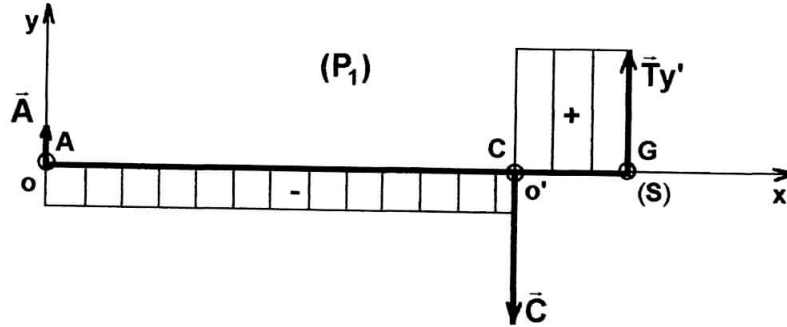
Nous observons **uniquement** les efforts tranchants dans cet équilibre \Rightarrow équation (1)

(P_1)	(P_2)
$\bar{A} + \bar{T}_y = \vec{0}$	$-\bar{T}_y + \bar{C} + \bar{B} = \vec{0}$
$\bar{T}_y = -\bar{A}$	$\bar{T}_y = \bar{C} + \bar{B}$
Signe de T_y : $T_y = -A$	Signe de T_y : $T_y = -C + B$

\bar{T}_y : Effort tranchant appliqué à (P_1) [$T_y = -A = -C + B$]



Effort tranchant appliqué à (P_1) [$T_y' = -A + C = B$]

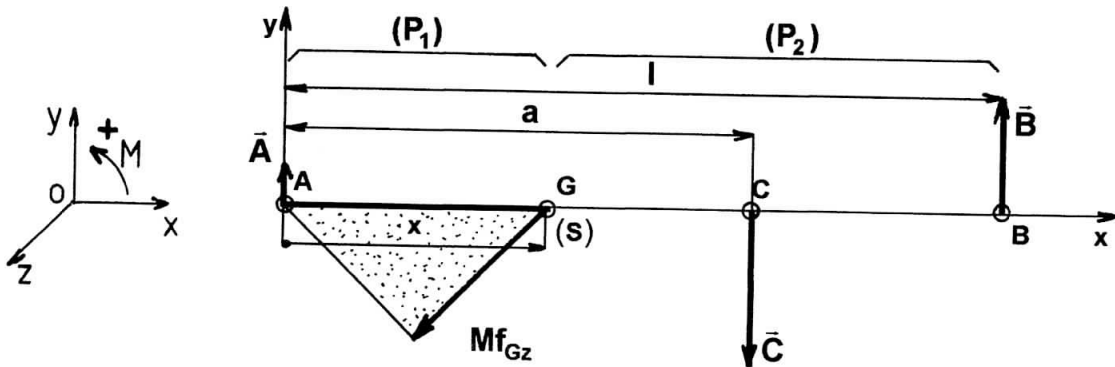


●* La composante T_y de l'effort tranchant est égale à la somme algébrique, *changée de signe*, des composantes sur y des forces extérieures appliquées appliquées à (P_1) .

On pourrait dire de la même façon :

La composante T_y de l'effort tranchant est égale à la somme algébrique des composantes sur y des forces extérieures appliquées à (P_2) .

MOMENT FLECHISSANT Mf_{Gz}



●* La composante Mf_{Gz} du moment de flexion en G est égale à la somme algébrique, *changée de signe*, des composantes sur z des moments en G des forces extérieures appliquées à (P_1) .

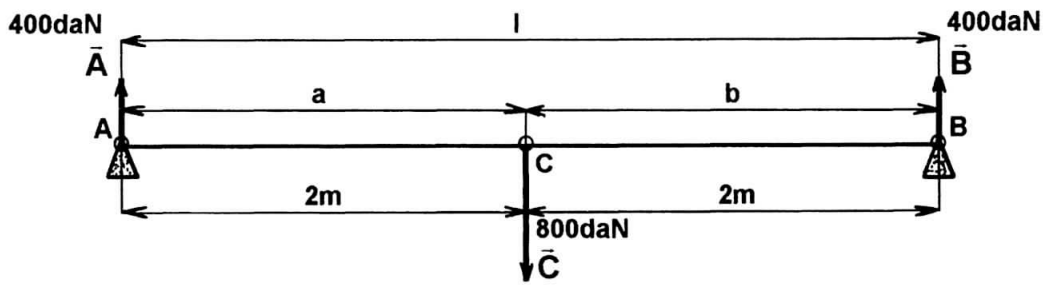
On pourrait dire de la même façon :

La composante Mf_{Gz} du moment de flexion en G est égale à la somme algébrique des composantes sur z des moments en G des forces extérieures appliquées à (P_2) .

$$Mf_{Gz} = -(-A \cdot x) = -C(a - x) + B(l - x)$$

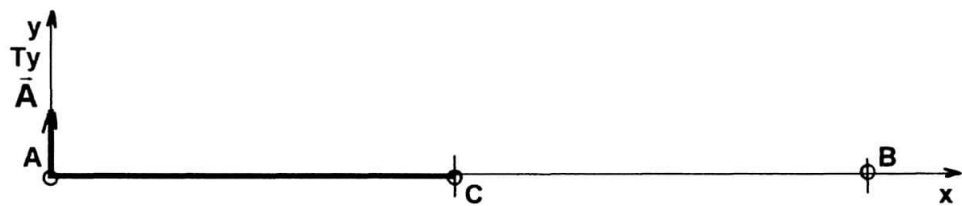
EXEMPLE 1

Systeme isole et modelise :



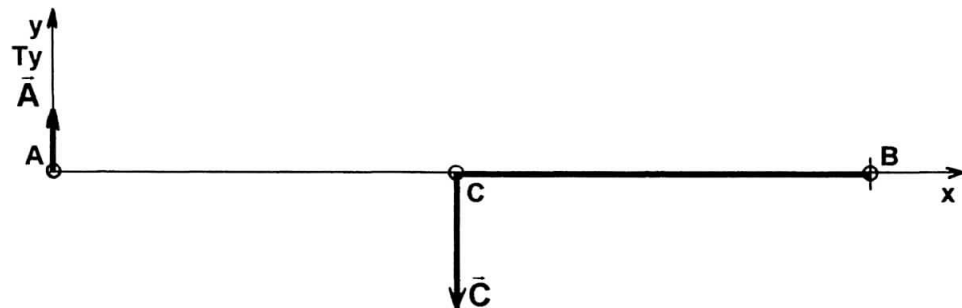
EFFORTS TRANCHANTS

Tronçon AC (à gauche de C)



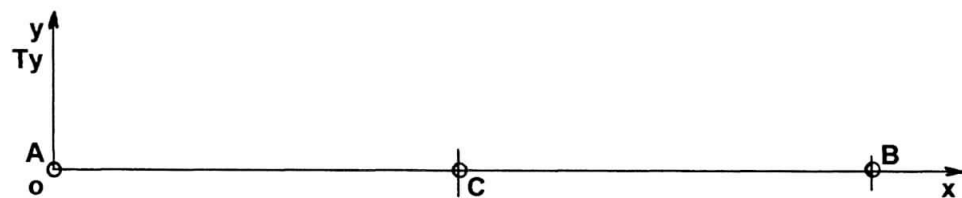
$Ty_{GAC} = \dots\dots\dots$

Tronçon CB (C inclus)



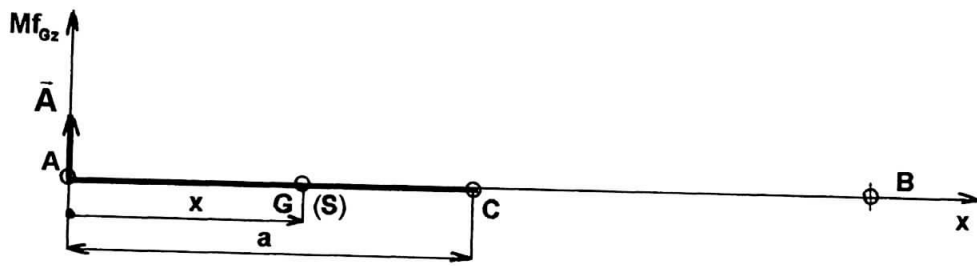
$Ty_{GCB} = \dots\dots\dots$

Diagramme des efforts tranchants Ty



MOMENTS FLECHISSANTS

Tronçon AC



$$Mf_{GzAC} = \dots\dots\dots$$

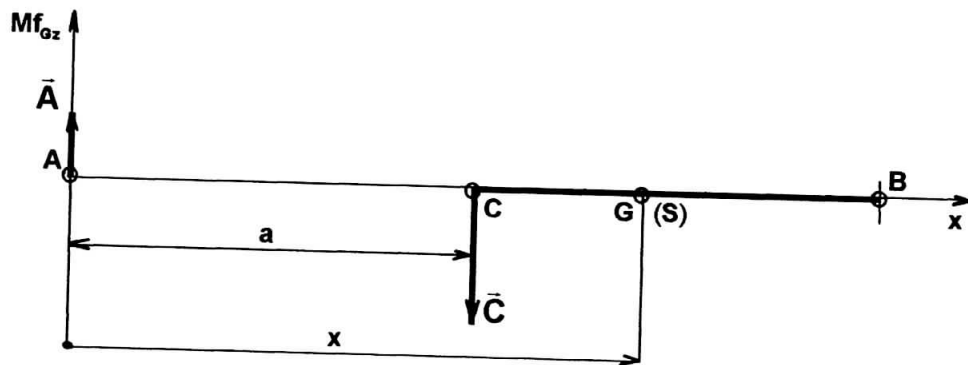
Pour $x = 0$

$$Mf_{GzAC} = \dots\dots\dots$$

Pour $x = a = 2$

$$Mf_{GzAC} = \dots\dots\dots$$

Tronçon CB



$$Mf_{GzCB} = \dots\dots\dots$$

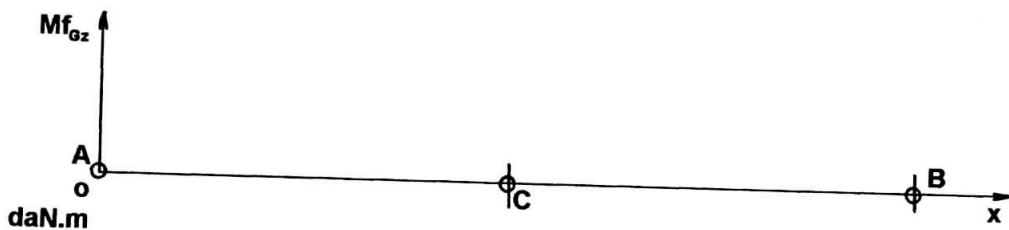
Pour $x = a = 2$

$$Mf_{GzCB} = \dots\dots\dots$$

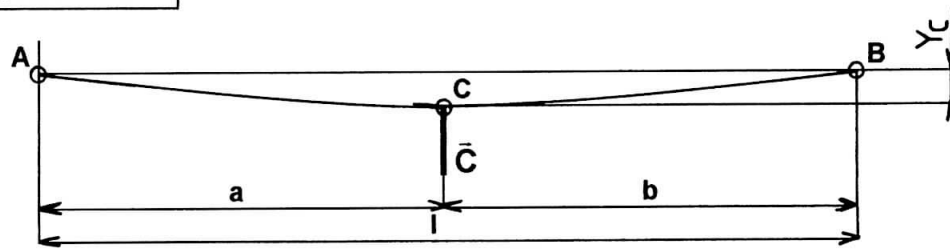
Pour $x = l = 4$

$$Mf_{GzCB} = \dots\dots\dots$$

Diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz}



DEFORMATION



Pour $x = a$

$$Y_c = \frac{-C \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I_{G_z} \cdot l}$$

Si $a = \frac{l}{2}$

$$Y_c = \frac{-C \cdot l^3}{48 E \cdot I_{G_z}}$$

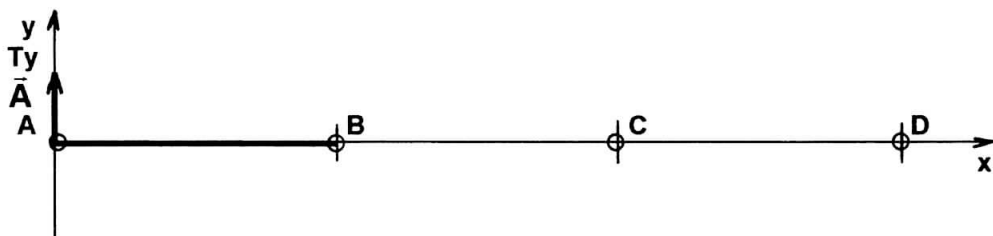
EXEMPLE 2

Systeme isole et modelise :



EFFORTS TRANCHANTS

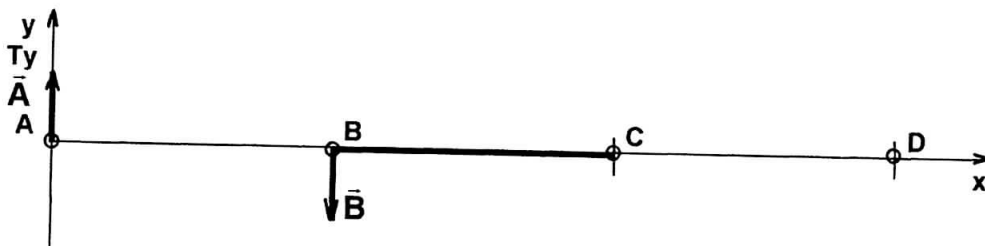
Tronçon AB (à gauche de B)



$$T_{y_{GAB}} = \dots\dots\dots$$

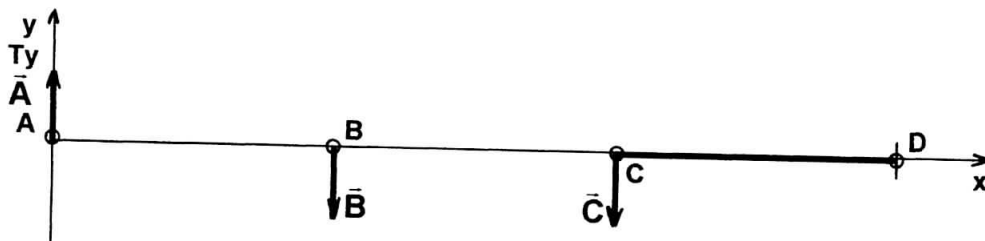
$$= \dots\dots\dots$$

Tronçon BC (B inclus, à gauche de C)



$T_{y_{GBC}} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

Tronçon CD (C inclus)



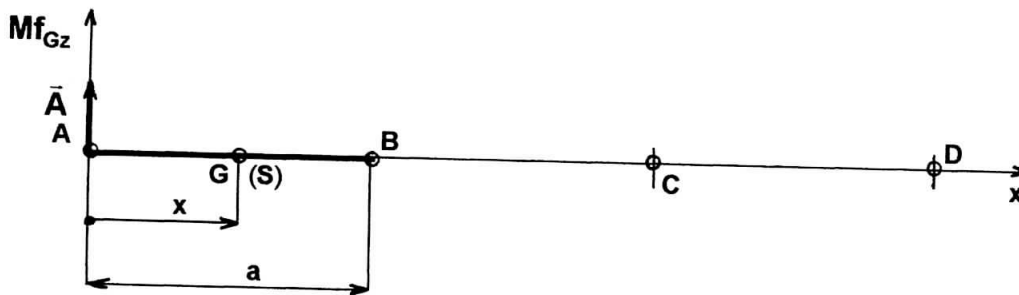
$T_{y_{GCD}} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

Diagramme des efforts tranchants T_y :



MOMENTS FLECHISSANTS

Tronçon AB



$M_{Gz_{AB}} = \dots\dots\dots$

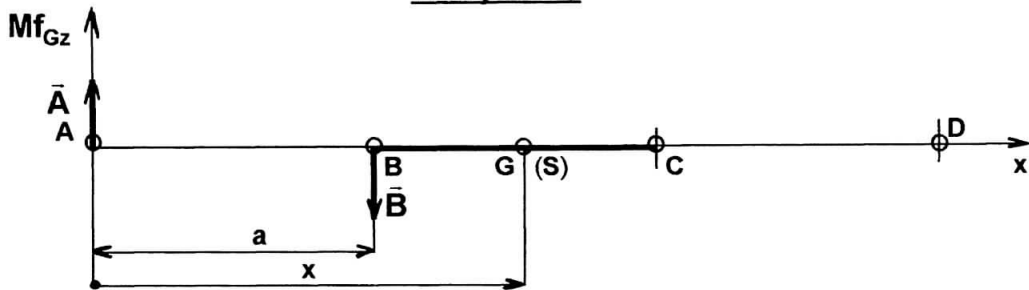
Pour $x = 0$

$$Mf_{GzAB} = \dots\dots\dots$$

Pour $x = a = 1$

$$Mf_{GzAB} = \dots\dots\dots$$

Tronçon BC



$$Mf_{GzBC} = \dots\dots\dots$$

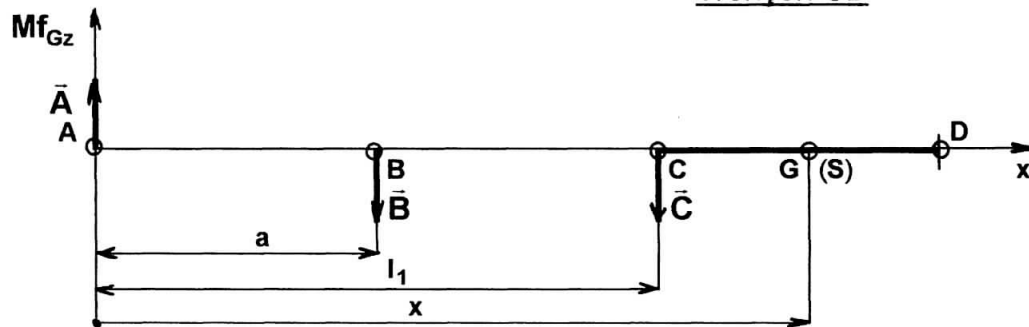
Pour $x = a = 1$

$$Mf_{GzBC} = \dots\dots\dots$$

Pour $x = l_1 = 2$

$$Mf_{GzBC} = \dots\dots\dots$$

Tronçon CD



$$Mf_{GzCD} = \dots\dots\dots$$

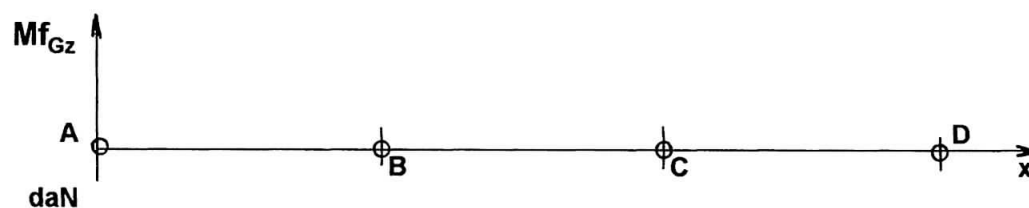
Pour $x = 2$

$$Mf_{GzCD} = \dots\dots\dots$$

Pour $x = l_2 = 4$

$$Mf_{GzCD} = \dots\dots\dots$$

Diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz}



APPLICATION

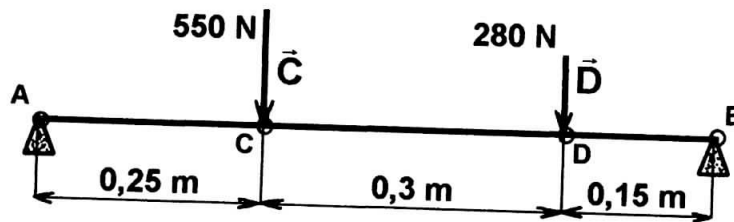
A partir du système ci-dessous, isolé et modélisé :

■ - DETERMINER :

- Les réactions de contact en **A** et **B** (Par le calcul)

■ - DETERMINER ET TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y
- Le diagramme des moments fléchissants M_{Gz}



1

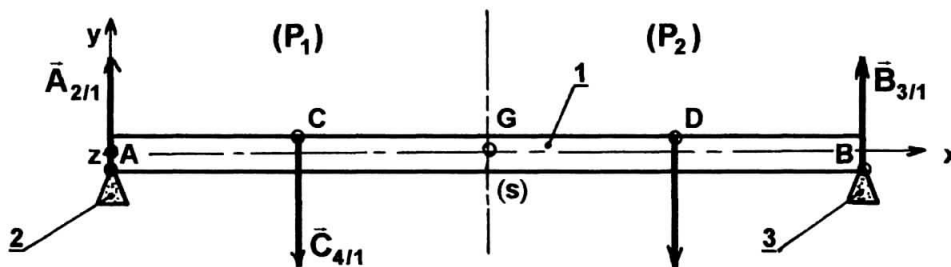
LA FLEXION SIMPLE

3. CONTRAINTES

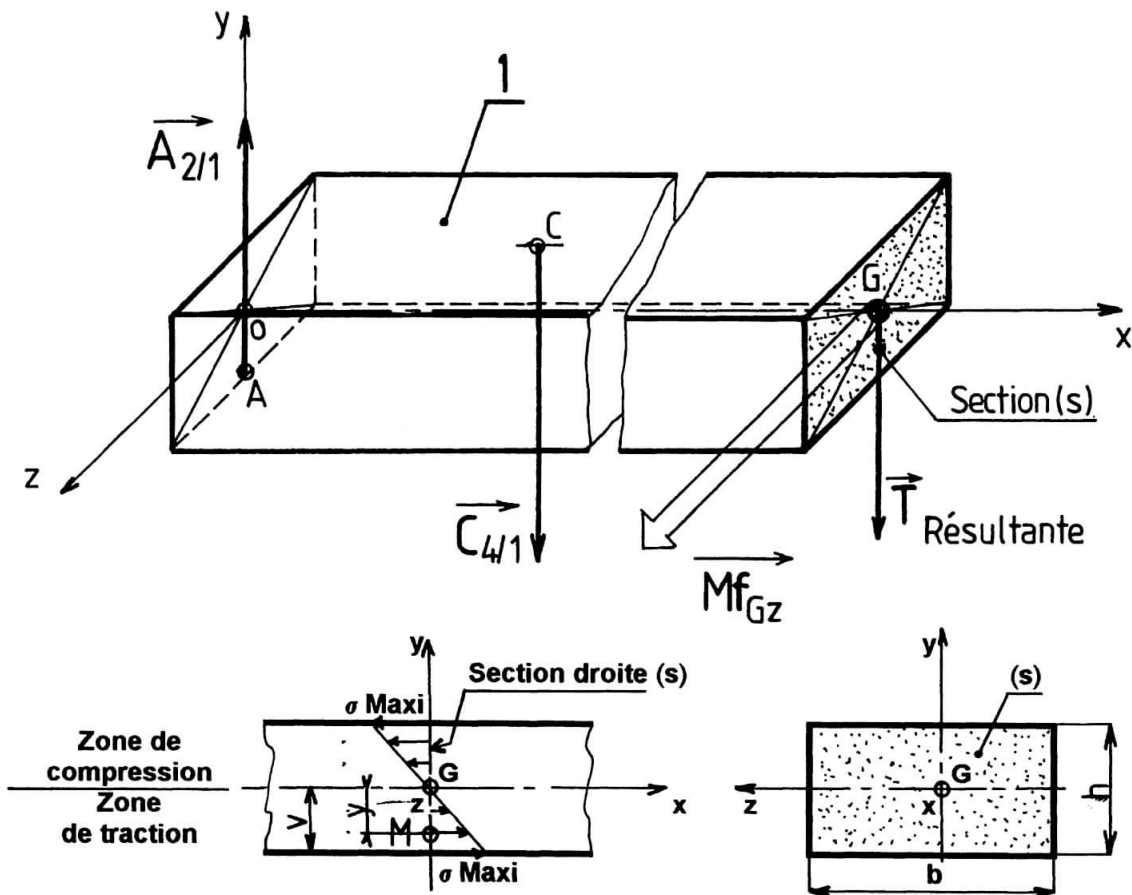
RELATION FONDAMENTALE

Pour toute partie sollicitée en flexion, la contrainte normale σ en un point M d'une section droite (s) est proportionnelle à la distance y entre ce point et le plan moyen passant par G .

Système isolé et modélisé.



Isolement de la partie (P₁)



CONTRAINTE NORMALE

$$\sigma = \frac{Mf_{Gz}}{I_{Gz}} \cdot y$$

Avec :

σ : valeur algébrique (en **MPa** ou **N/mm²**) de la contrainte normale $\vec{\sigma}$ en **M** d'ordonnée **y**.

y : ordonnée du point **M** dans **(G, \bar{x} , \bar{y} , \bar{z})** en **mm**.

Mf_{Gz} : valeur algébrique du moment de flexion par rapport à l'axe **(G, \bar{z})** en **N.mm**.

I_{Gz} : Moment quadratique de la section droite (**s**) par rapport à l'axe **(G, \bar{z})** perpendiculaire au plan des charges en **mm⁴**

CONTRAINTE NORMALE MAXI

I_{Gz} est constant le long de la poutre.

La contrainte Maxi est obtenue dans la section droite où le moment fléchissant est maximal et pour la fibre la plus éloignée du plan neutre.

$$\|\vec{\sigma}_{\text{Maxi}}\| = \frac{\|\vec{M}f_{Gz \text{ Maxi}}\|}{\left(\frac{I_{Gz}}{\|\vec{y}_{\text{Maxi}}\|} \right)}$$

$$\|\vec{y}_{\text{Maxi}}\| = V \quad ; \quad \frac{I_{Gz}}{\|\vec{y}_{\text{Maxi}}\|} = \frac{I_{Gz}}{V} = \mu_{Gz}$$

C'est une caractéristique des sections droites des profilés du commerce, elle est alors désignée : "**module de flexion**".

CONTRAINTE EN FONCTION DU MATERIAU

Dans le cas de la flexion il faut faire 2 opérations :

- **DETERMINER** la section du moment fléchissant Maxi.

- **VERIFIER** que la contrainte Maxi (dans cette section) est inférieure à **Rpe**.

Nous savons que : $Rpe = \frac{Re}{s}$

$$\|\vec{\sigma}_{\text{Maxi}}\| \leq Rpe \quad \text{ou} \quad \frac{\|\vec{M}f_{Gz \text{ Maxi}}\|}{\left(\frac{I_{Gz}}{\|\vec{y}_{\text{Maxi}}\|} \right)} \leq Rpe$$

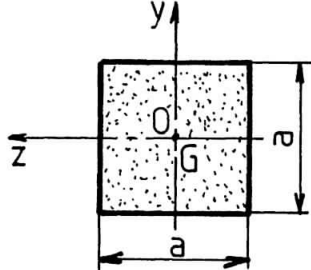
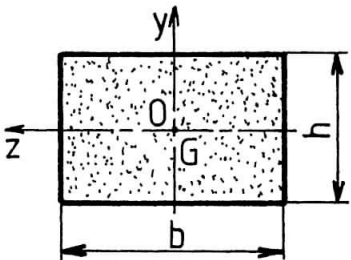
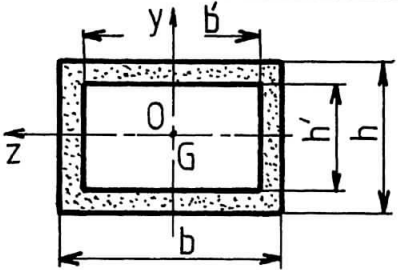
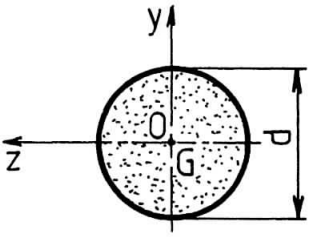
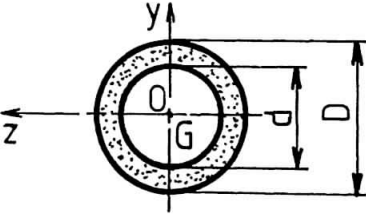
CONCENTRATION DE CONTRAINTES

S'il y a changement de section: σ devient :

$$\|\sigma_{\text{eff Maxi}}\| = \|\sigma_{\text{théo}}\| \cdot K_f$$

VALEURS de I_{Gz} et μ_{Gz}

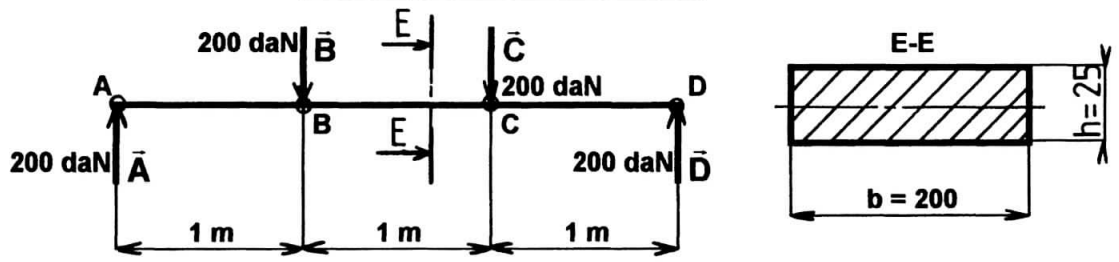
Moments quadratiques et modules de flexion de sections courantes.

Sections	V	I_{Gz} et μ_{Gz}
	$\frac{a}{2}$	$I_{Gz} = \frac{a^4}{12}$ $\mu_{Gz} = \frac{a^3}{6}$
	$\frac{h}{2}$	$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$ $\mu_{Gz} = \frac{bh^2}{6}$
	$\frac{h}{2}$	$I_{Gz} = \frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$ $\mu_{Gz} = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$
	$\frac{d}{2}$	$I_{Gz} = \frac{\pi d^4}{64}$ $\mu_{Gz} = \frac{\pi d^3}{32}$
	$\frac{D}{2}$	$I_{Gz} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $\mu_{Gz} = \frac{\pi}{32D} (D^4 - d^4)$

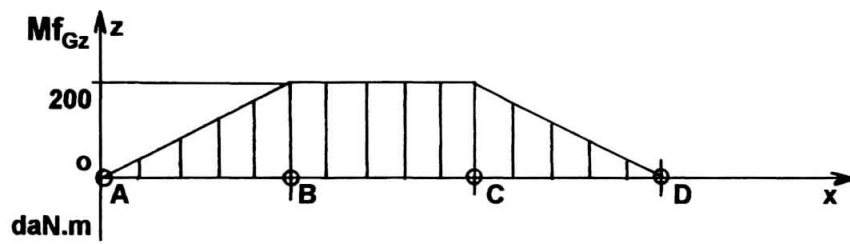
EXEMPLE 1

A partir du :

Système isolé et modélisé :



Moment fléchissant M_{Gz} Maxi



■ - DETERMINER :

La contrainte Maxi dans la section droite.

Résolution :

EXEMPLE 2

A partir de l'exemple précédent :

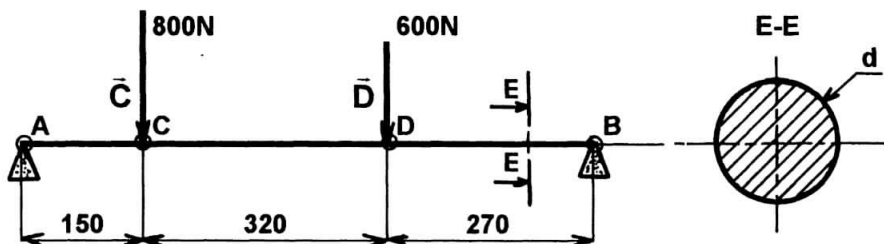
$$\|\bar{M}_{Gz \text{ Maxi}}\| = 200 \text{ daN.m} ; \bullet^* \text{ Diamètre de la poutre} = 50 \text{ mm}$$

■ - DETERMINER la contrainte Maxi dans la section droite.

Résolution :

APPLICATION

A partir du système isolé et modélisé ci-dessous :



Les dimensions sont en mm.

■ DETERMINER :

- Les réactions en **A** et **B** (par le calcul).
- Le diagramme des efforts tranchants T_y .
- La valeur du moment fléchissant Maxi M_{Gz} .
- Le diamètre **d** de la barre :

Résistance élastique à l'extension $Re = 52 \text{ daN/mm}^2$

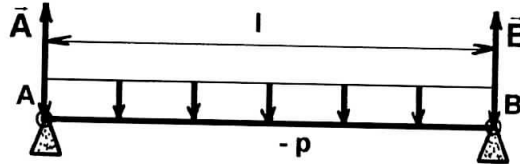
Coefficient de sécurité : $s = 3$

1

LA FLEXION SIMPLE

4. POUTRE SUR 2 APPUIS CHARGES UNIFORMEMENT REPARTIES

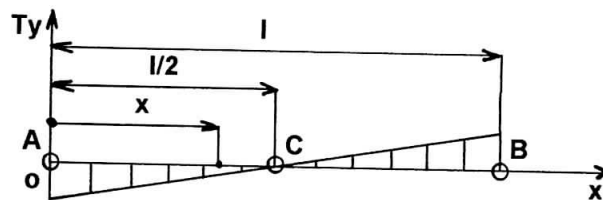
SYSTEME ISOLE ET MODELISE



$$\|\bar{A}\| = \|\bar{B}\| = \frac{p \cdot l}{2}$$

p = Coefficient de charge ; p = masse linéique x 9,81 ; p en N/m

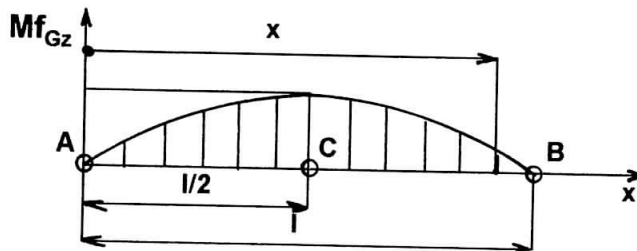
EFFORT TRANCHANT



$$T_y = px - p \cdot l/2$$

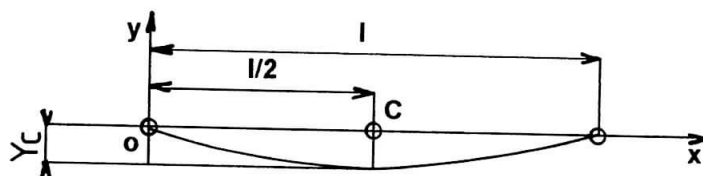
En A : $T_y = -p \cdot l/2$; En B : $T_y = p \cdot l/2$

MOMENT FLECHISSANT \curvearrowright En un point entre A et B à une distance x)



$$M_{f_{Gz}} = \|\bar{A}\| \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2} ; M_{f_{Gz} \text{Maxi}} = \frac{p \cdot l^2}{8}$$

DEFORMATION (Flèche)



$$\text{Flèche Maxi en C} ; y_c = -\frac{5p \cdot l^4}{384E \cdot I_{Gz}}$$

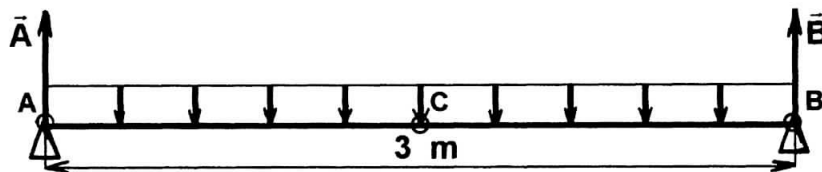
EXEMPLE

La poutre est soumise à l'action de son propre poids.

Hypothèses simplificatrices :

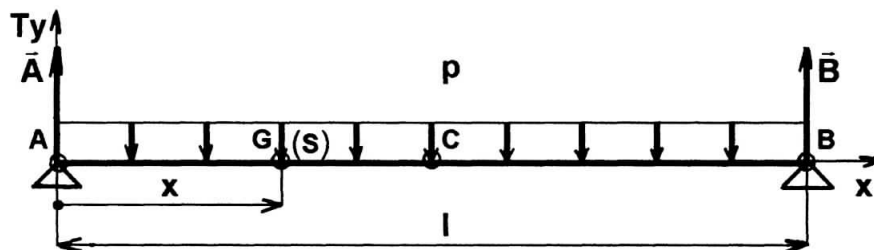
Poutre IPN de 160 ; $\frac{I_{Gz}}{V} = 117 \text{ cm}^3$; masse linéique 17,9 kg/m

Système isolé et modélisé



- DETERMINER les actions en A et B.
 - DETERMINER les efforts tranchants T_y .
En A : $x = 0$; En B : $x = 3 \text{ m}$; En C : $x = 1,5 \text{ m}$.
 - TRACER le diagramme des efforts tranchants.
 - DETERMINER les moments fléchissants M_{Gz} .
En A : $x = 0$; En B : $x = 3 \text{ m}$; En C : $x = 3/2 \text{ m}$.
 - TRACER le diagramme des moments fléchissants.
- DETERMINATION des actions en A et B :

- DETERMINATION des efforts tranchants T_y :



$$T_y =$$

$$\text{En A : } x = 0$$

$$T_y =$$

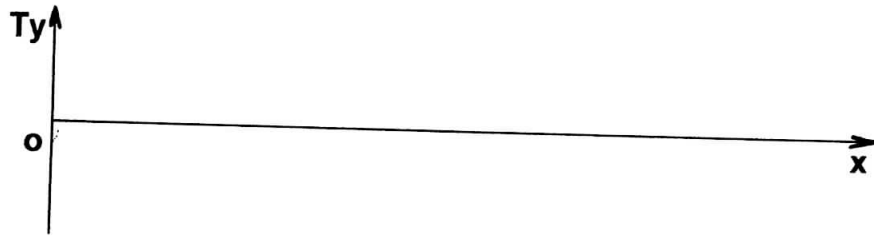
$$\text{En B : } x = 3$$

$$T_y =$$

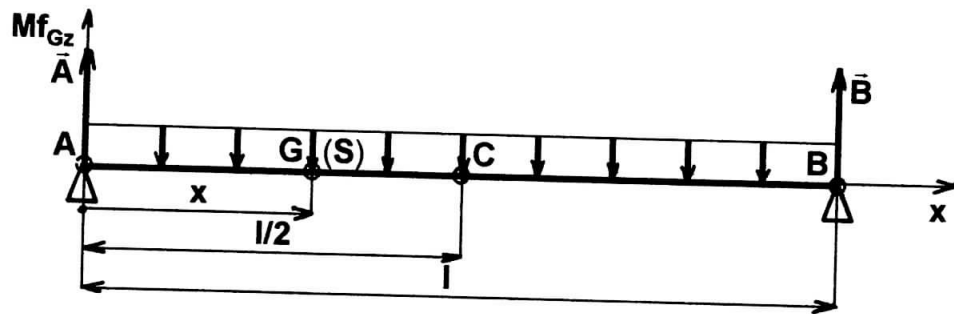
$$\text{En C : } x = \frac{l}{2} = 1,5$$

$$T_y =$$

□- **DIAGRAMME** des efforts tranchants.



□- **DETERMINATION** des moments fléchissants M_{Gz} .



$M_{Gz} =$

En A : $x = 0$

$M_{Gz} =$

En B : $x = l = 3$

$M_{Gz} =$

En C : $x = l/2 = 1,5$

$M_{Gz} =$

□- **DIAGRAMME** des moments fléchissants.



APPLICATION

Une poutre droite (à section constante) sur 2 appuis A et B, chargée uniformément de A à B, est en IPN de 120 ; masse linéique = 11,2 kg/m ; longueur de la poutre 3m ; $E = 21 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$; $Re = 240 \text{ N/mm}^2$; $s = 1,5$; $I_{Gz} = 328 \text{ cm}^4$; $\mu_{Gz} = 54,7 \text{ cm}^3$.

- **DETERMINER** - Les réactions aux appuis A et B.
- Les efforts tranchants Ty et **TRACER** le diagramme.
- Les moments fléchissants M_{Gz} et **TRACER** le diagramme.
- Si la contrainte δ_{Maxi} est compatible avec **Rpe**.

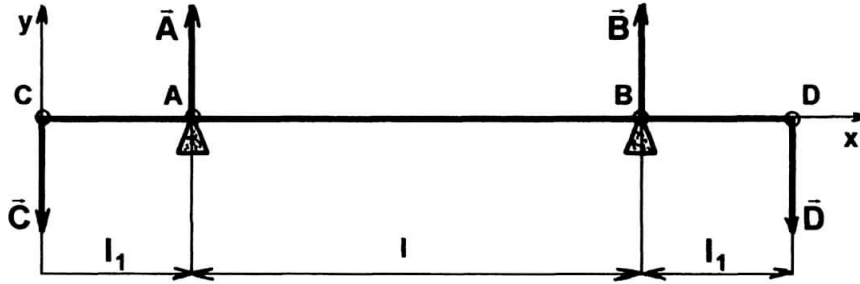
FICHE APPLICATIONS	NOM :	CLASSE :
--------------------	-------	----------

1

LA FLEXION SIMPLE

5. POUTRE SUR 2 APPUIS (Porte-à-faux symétrique) 2 CHARGES (mini) CONCENTREES

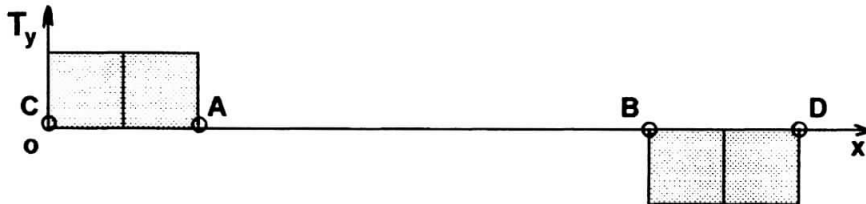
SYSTEME ISOLE ET MODELISE



ACTIONS EXERCEES EN A et B

$$\bar{A} + \bar{B} = -\bar{C} - \bar{D} \quad ; \quad \text{Dans ce cas: } \|\bar{A}\| = \|\bar{B}\| = \|\bar{C}\| = \|\bar{D}\|$$

EFFORT TRANCHANT

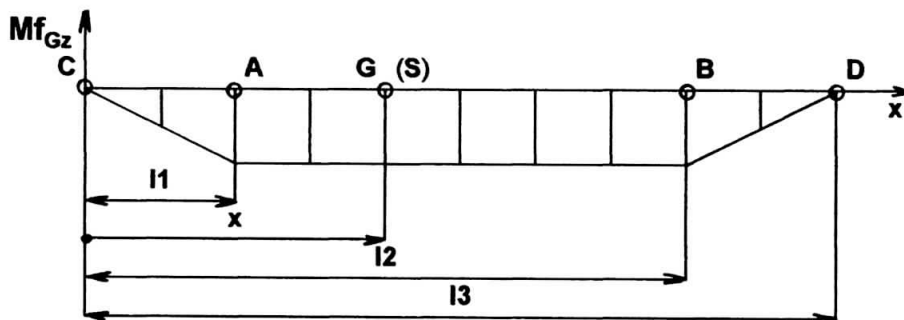


$$\text{De C à A (à gauche de A) : } T_y = \|\bar{C}\|$$

$$\text{De A à B (A inclus, à gauche de B) : } T_y = 0$$

$$\text{De B à D (B inclus) : } T_y = +\|\bar{C}\| - \|\bar{A}\| - \|\bar{B}\|$$

MOMENT FLECHISSANT



Tronçon CA

$$Mf_{GzCA} = -\|\bar{C}\| \cdot x$$

Pour $x = 0$ $Mf_{GCA} = 0$

Pour $x = l_1$ $Mf_{GCA} = -\|\bar{C}\| \cdot l_1$

Tronçon AB

$$Mf_{GzAB} = -\|\bar{C}\| \cdot x + \|\bar{A}\| \cdot (l_1 - x)$$

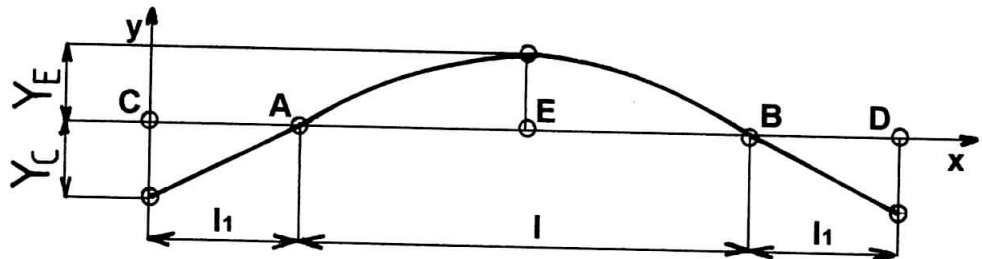
Pour $x = l_2$ $Mf_{GAB} = -\|\bar{C}\| \cdot l_2 + \|\bar{A}\| \cdot (l_1 - l_2)$

Tronçon BD

$$Mf_{GzBD} = -\|\bar{C}\| \cdot x + \|\bar{A}\| \cdot (l_1 - x) + \|\bar{B}\| \cdot (l_2 - x)$$

Pour $x = l_3$ $Mf_{GBD} = -\|\bar{C}\| \cdot l_3 + \|\bar{A}\| \cdot (l_1 - l_3) + \|\bar{B}\| \cdot (l_2 - l_3) = 0$

DEFORMATION



$$\text{Flèche en E : } x_E = \frac{l + 2l_1}{2}$$

$$Y_E = \frac{\|\bar{C}\| \cdot l_1 \cdot l^2}{8E \cdot I_{Gz}}$$

$$Y_C = -\frac{\|\bar{C}\| \cdot l_1^2}{6E \cdot I_{Gz}} (3l + 2l_1)$$

EXEMPLE

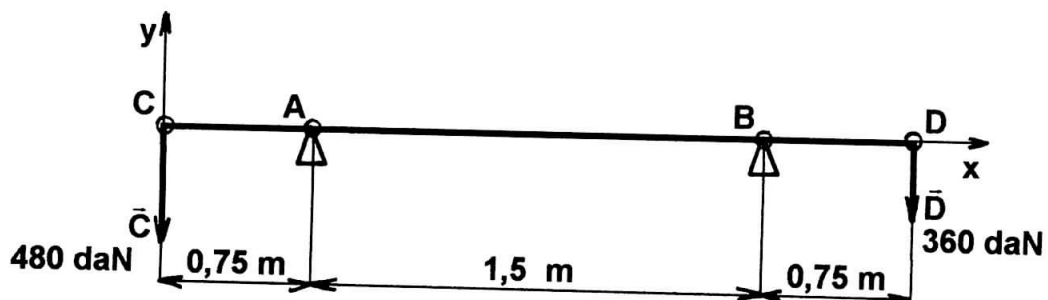
A partir du système ci-dessous, isolé et modélisé :

■ DETERMINER par le calcul les actions de contact en A et B :

■ DETERMINER et TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y :

- Le diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz} :



□ DETERMINATION des actions en **A** et **B** :

□ DETERMINATION des efforts tranchants **Ty** :

De **C** à **A** (à gauche de A) : **Ty** =

De **A** à **B** (A inclus, à gauche de B) : **Ty** =

De **B** à **D** (B inclus) : **Ty** =

□- DIAGRAMME des efforts tranchants :



□- DETERMINATION des moments fléchissants **Mf_{Gz}** :

Tronçon CA

$$Mf_{GzCA} =$$

Pour $x = 0$ $Mf_{GCA} =$

Pour $x = l_1 = 0,75$ $Mf_{GCA} =$

Tronçon AB

$$Mf_{GzAB} =$$

Pour $x = l_2 = 2,25$ $Mf_{GAB} =$

$$Mf_{GAB} =$$

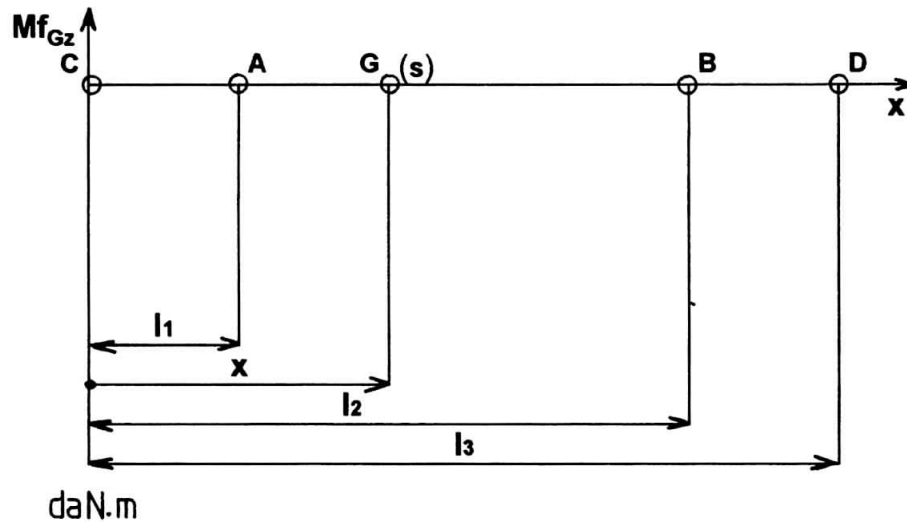
Tronçon BD

$$Mf_{GzBD} =$$

Pour $x = l_3 = 3$ $Mf_{GBD} =$

$$Mf_{GBD} =$$

□- **DIAGRAMME** des moments fléchissants :



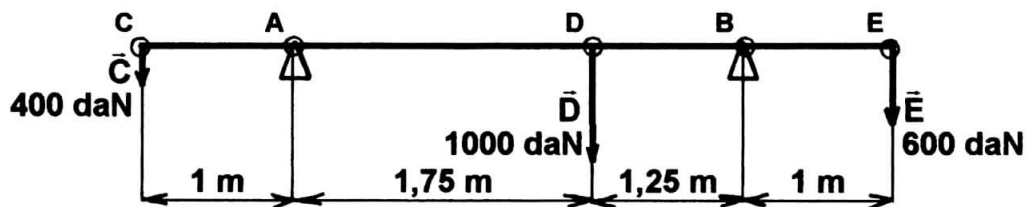
APPLICATION

A partir du système ci-dessous, isolé et modélisé :

■- **DETERMINER** par le calcul les actions de contact en A et B:

■- **DETERMINER** et **TRACER** :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y .
- Le diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz} .

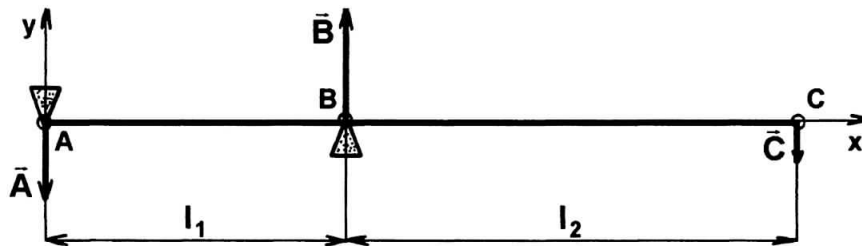


1

LA FLEXION SIMPLE

6. POUTRE SUR 2 APPUIS (Porte-à-faux unilatéral) CHARGES CONCENTREES

SYSTEME ISOLE ET MODELISE

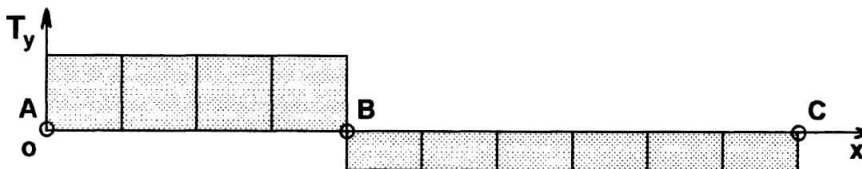


ACTIONS EXERCEES EN A et B

$$A = \frac{C \cdot l_2}{l_1}$$

$$B = -\frac{C}{l_1} \cdot (l_1 + l_2)$$

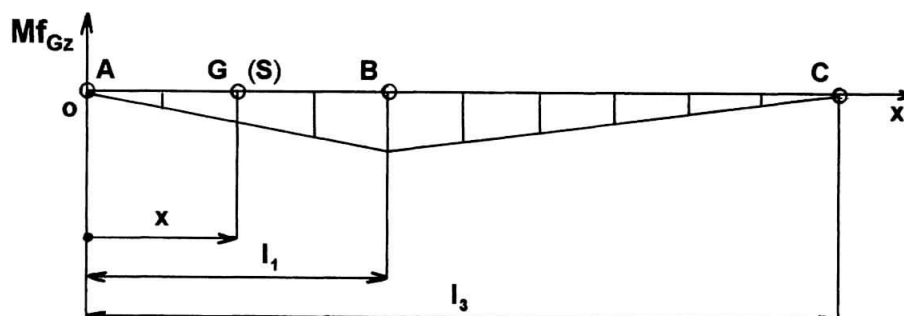
EFFORT TRANCHANT



$$T_{yAB} \text{ (à gauche de B)} = \|\bar{A}\|$$

$$T_{yBC} \text{ (B inclus)} = \|\bar{A}\| - \|\bar{B}\| = -\|\bar{C}\|$$

MOMENT FLECHISSANT



Tronçon AB

$$Mf_{GzAB} = - \|\bar{A}\| \cdot x$$

Pour $x = 0$ $Mf_{GAB} = 0$

Pour $x = l_1$ $Mf_{GAB} = - \|\bar{A}\| \cdot l_1$

Tronçon BC

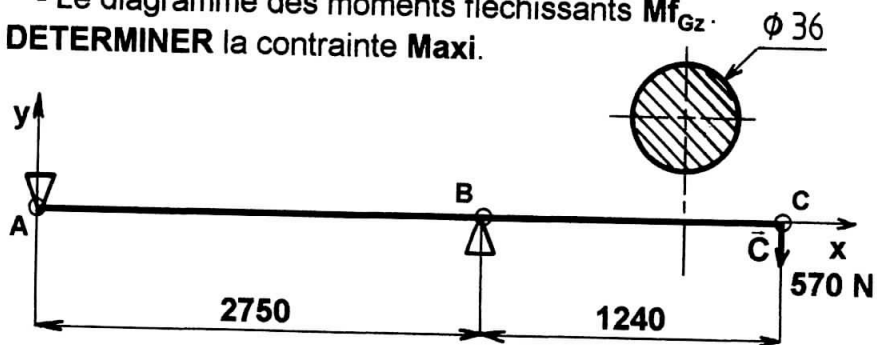
$$Mf_{GzBC} = - \|\bar{A}\| \cdot x + \|\bar{B}\| \cdot (l_1 - x)$$

Pour $x = l_3$ $Mf_{GBC} = 0$

EXEMPLE

A partir du système ci-dessous, isolé et modélisé :

- - DETERMINER les actions en A et B.
- - DETERMINER et TRACER:
 - Le diagramme des efforts tranchants T_y .
 - Le diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz} .
- - DETERMINER la contrainte **Maxi**.



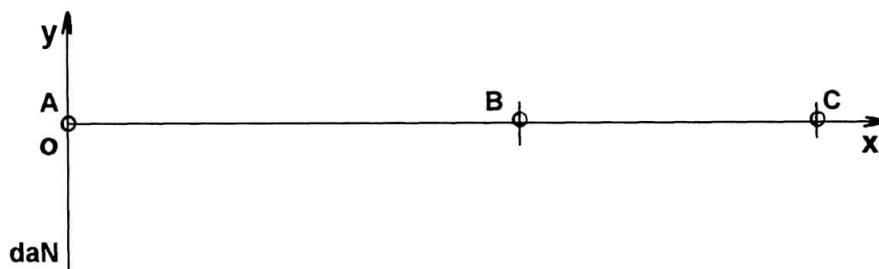
- - Détermination des actions en A et B :

□ - DETERMINATION des efforts tranchants T_y :

Tronçon AB (à gauche de B)

Tronçon BC (B inclus)

□ - DIAGRAMME des efforts tranchants T_y :

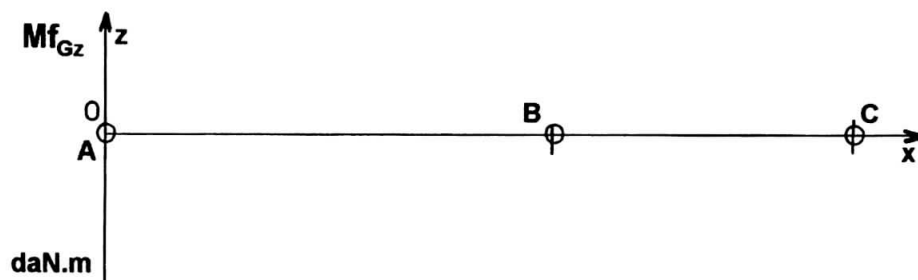


□ - DETERMINATION des moments de flexion M_{Gz} :

Tronçon AB

Tronçon BC

□ - **DIAGRAMME** des moments de flexion M_{Gz} :

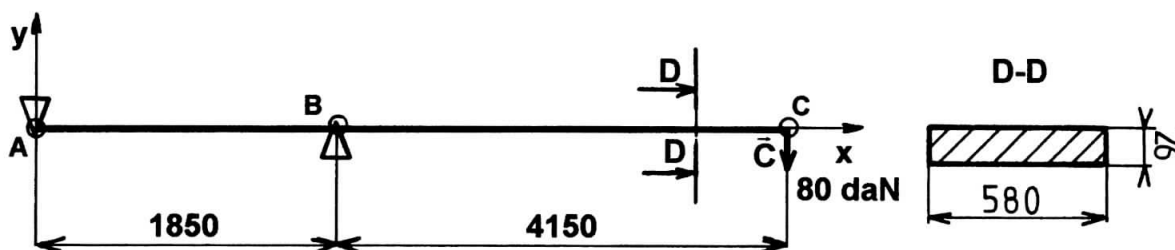


□ - **DETERMINATION** de la contrainte :

APPLICATION

A partir du système ci-dessous , isolé et modélisé :

- **DETERMINER** les actions en **A** et **B**.
- **DETERMINER** et **TRACER** :
 - Le diagramme des efforts tranchants T_y .
 - Le diagramme des moments fléchissant M_{Gz} .
- **DETERMINER** la contrainte **Maxi**.



FICHE APPLICATIONS NOM :

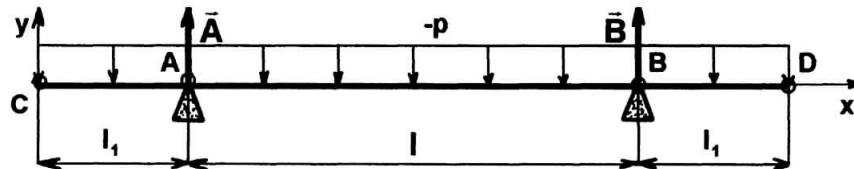
CLASSE :

1

LA FLEXION SIMPLE

7. POUTRE SUR 2 APPUIS (Porte-à-faux symétrique) CHARGE REPARTIE

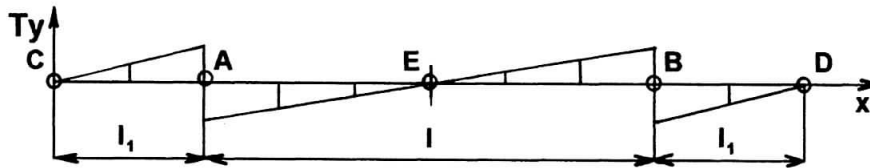
SYSTEME ISOLE ET MODELISE



ACTIONS EXERCEES EN A et B

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \frac{p}{2}(l + 2l_1)$$

EFFORT TRANCHANT



$$T_{y_{CA}} \text{ (à gauche de A)} = p \cdot x \quad ; \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$\text{En C : } T_y = 0$$

$$\text{A l'approche de A, à gauche } x = l_1 : T_y = p \cdot l_1$$

$$T_{y_{AB}} \text{ (A inclus, à gauche de B)} = p \cdot x - \frac{p}{2}(l + 2l_1) \quad ; \quad l_1 \leq x < l_1 + l$$

$$\text{En A : } T_y = -\frac{p \cdot l}{2}$$

$$\text{En E : } T_y = 0 \quad ; \quad x = l_1 + \frac{l}{2}$$

$$\text{A gauche de B : } T_y = +\frac{p \cdot l}{2}$$

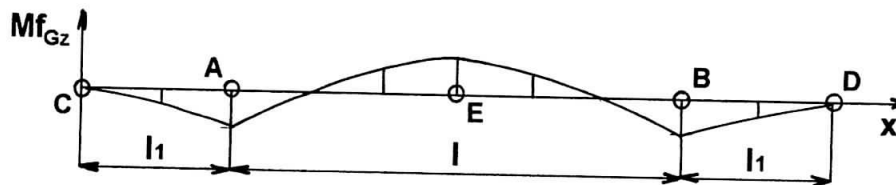
$$T_{y_{BD}} \text{ (B inclus)} = -p \cdot x \quad ; \quad l_1 \leq x \leq 0$$

$$\text{Entre B et D } x \rightarrow 0$$

$$\text{En B } T_y = -p \cdot l_1$$

$$\text{En D : } T_y = 0$$

MOMENT FLECHISSANT



Tronçon CA

$$Mf_{GzCA} = -\frac{p \cdot x^2}{2} ; 0 \leq x \leq l_1$$

Pour $x = 0$ En C : $Mf_{Gz} = 0$

Pour $x = l_1$ En A : $Mf_{Gz} = -\frac{p \cdot l_1^2}{2}$

Tronçon AB

$$Mf_{GzAB} = \|\bar{A}\| \cdot (x - l_1) - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

Pour $x = l_1$ En A : $Mf_{Gz} = -\frac{p \cdot l_1^2}{2}$

Pour $x = l_1 + l$ En B : $Mf_{Gz} = \|\bar{A}\| \cdot l - \frac{p \cdot (l_1 + l)^2}{2}$

Pour $x = l_1 + \frac{l}{2}$ En E : $Mf_{Gz} = \frac{p}{8} (l^2 - 4l_1^2)$

Tronçon BD

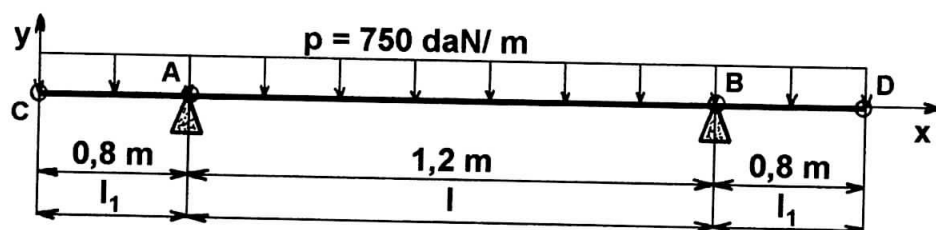
$$Mf_{GzBD} = -\frac{p \cdot x^2}{2} ; l_1 \leq x \leq 0$$

Pour $x = l_1$ En B : $Mf_{Gz} = -\frac{p \cdot l_1^2}{2}$

Pour $x = 0$ En D : $Mf_{Gz} = 0$

EXEMPLE

A partir du système ci-dessous, isolé et modélisé :



■- DETERMINER :

- Les actions de contact en A et B.

■- DETERMINER ET TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y .
- Le diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz} .

□ - DETERMINATION des actions en A et B :

□ - DETERMINATION des efforts tranchants T_y :

Tronçon CA (à gauche de A)

$$T_{y_{CA}} = \dots\dots\dots$$

$$\text{En C : } T_y = \dots\dots\dots$$

$$\text{A gauche de A : } T_y = \dots\dots\dots$$

Tronçon AB (à inclus, à gauche de B)

$$T_{y_{AB}} = \dots\dots\dots$$

$$\text{En A : } T_y = \dots\dots\dots$$

$$\text{En B : } T_y = \dots\dots\dots$$

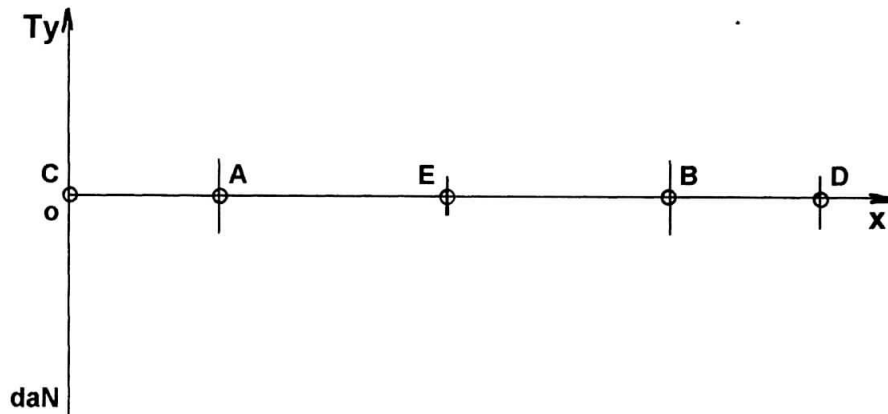
$$\text{En E : } T_y = \dots\dots\dots$$

Tronçon BD (à droite de B)

$$\text{En B : } T_y = \dots\dots\dots$$

$$\text{En D : } T_y = \dots\dots\dots$$

□ - DIAGRAMME des efforts tranchants T_y :



□ - DETERMINATION des moments fléchissants Mf_{Gz} :

Tronçon CA

$$Mf_{GzCA} =$$

Pour $x =$

$$\text{En C : } Mf_{Gz} =$$

Pour $x =$

$$\text{En A : } Mf_{Gz} =$$

Tronçon AB

$$Mf_{GzAB} =$$

Pour $x =$

$$\text{En A : } Mf_{Gz} =$$

Pour $x =$

$$\text{En B : } Mf_{Gz} =$$

Pour $x =$

$$\text{En E : } Mf_{GzMaxi} =$$

Tronçon BD

$$Mf_{GzBD} =$$

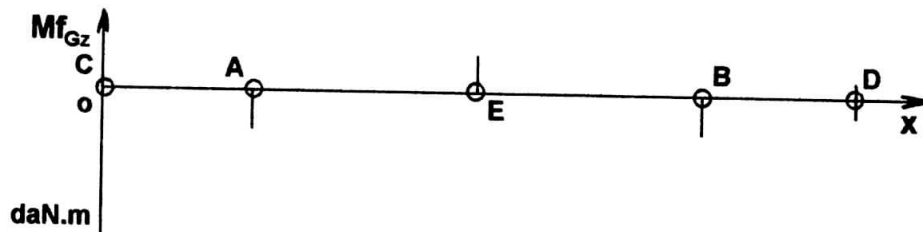
Pour $x =$

$$\text{En B : } Mf_{Gz} =$$

Pour $x =$

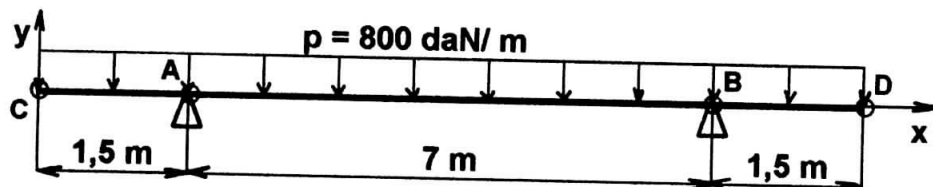
$$\text{En D : } Mf_{Gz} =$$

□ - DIAGRAMME des moments fléchissants Mf_{Gz} :



APPLICATION

A partir du système ci-dessous, isolé et modélisé :



■ - DETERMINER :

- Les actions de contact en A et B.

■ - DETERMINER ET TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y .

- Le diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz} .

FICHE APPLICATIONS | NOM :

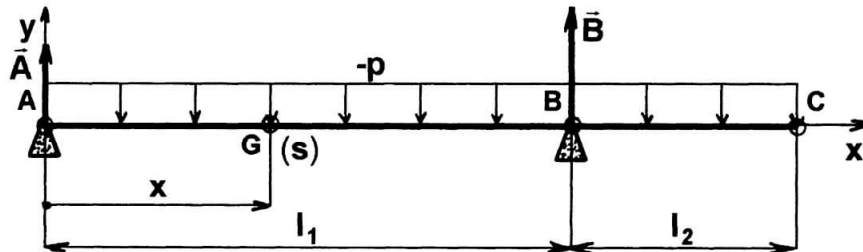
CLASSE :

1

LA FLEXION SIMPLE

8. POUTRE SUR 2 APPUIS (Porte-à-faux unilatéral) CHARGE REPARTIE

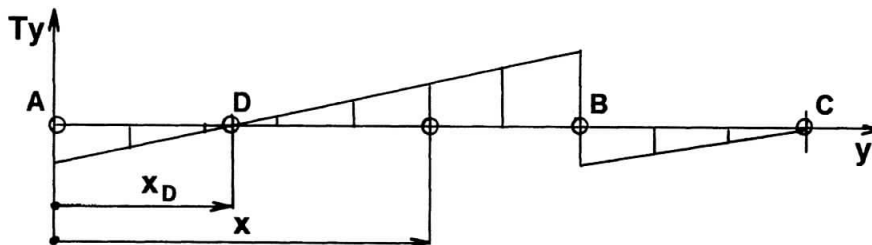
SYSTEME ISOLE ET MODELISE



ACTIONS EXERCEES EN A et B

$$\|\bar{A}\| = \frac{p}{2l_1} (l_1^2 - l_2^2) ; \quad \|\bar{B}\| = \frac{p}{2l_1} (l_1 + l_2)^2$$

EFFORT TRANCHANT



$$T_{y_{AB}} = p \cdot x - \|\bar{A}\| ; \quad 0 \leq x < l_1$$

$$\text{En A : } T_y = -\|\bar{A}\|$$

$$\text{A gauche de B : } T_y = p \cdot l_1 - \|\bar{A}\|$$

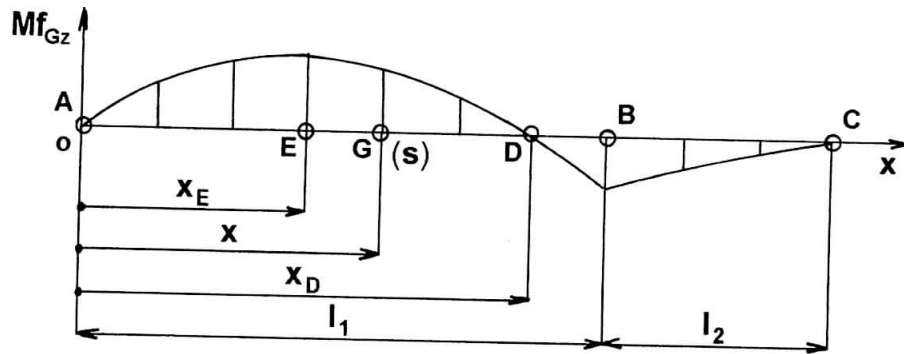
$$\text{Pour } x_D = \frac{(l_1 + l_2) \cdot 3}{8} \quad \text{En D : } T_y = 0$$

$$T_{y_{BC}} = -p \cdot x ; \quad l_2 \leq x \leq 0$$

$$\text{En B : } T_y = -p \cdot l_2$$

$$\text{En C : } T_y = 0$$

MOMENT DE FLEXION



Tronçon AB

$$\mathbf{Mf_{Gz} = \|\bar{A}\| \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} ; 0 \leq x \leq l_1}$$

Pour $x = 0$

En A: $Mf_{Gz} = 0$

Pour $x = l_1$

En B: $Mf_{Gz} = \|\bar{A}\| \cdot l_1 - \frac{p \cdot l_1^2}{2}$

Pour $x_E = \frac{(l_1 + l_2) \cdot 3}{8}$

En E: $Mf_{GzMaxi} = \|\bar{A}\| \cdot x_E - \frac{p \cdot x_E^2}{2}$

Pour $x_D = \frac{(l_1 + l_2) \cdot 3}{4}$

En D: $Mf_{Gz} = 0$

Tronçon BC

$$\mathbf{Mf_{Gz} = -\frac{p \cdot x^2}{2} ; l_2 \leq x \leq 0}$$

Pour $x = l_2$

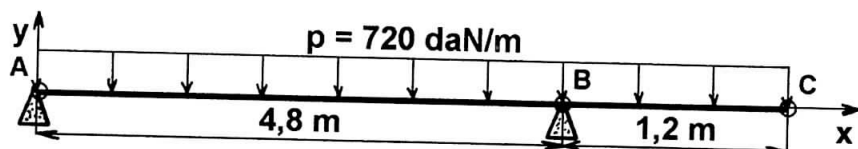
En B: $Mf_{Gz} = -\frac{p \cdot l_2^2}{2}$

Pour $x = 0$

En C: $Mf_{Gz} = 0$

APPLICATION

A partir du système ci-dessous isolé et modélisé :



■ - DETERMINER : Les actions de contact en A et B.

■ - DETERMINER et TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y .

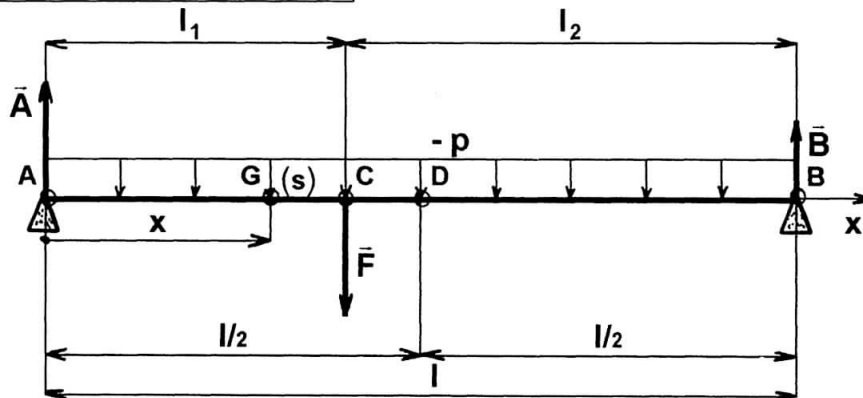
- Le diagramme des moments de flexion Mf_{Gz} .

1

LA FLEXION SIMPLE

9. POUTRE SUR 2 APPUIS : SOUMISE A L'ACTION DE SON PROPRE POIDS et A L'ACTION D'UNE CHARGE CONCENTREE

SYSTEME ISOLE ET MODELISE



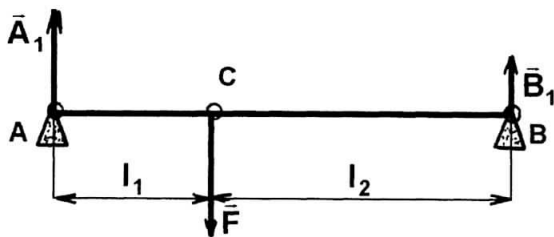
Grâce au :

THEOREME DE SUPERPOSITION

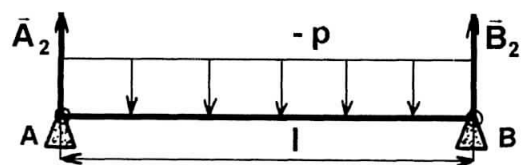
Le système ci-dessus peut se ramener à **additionner** :

- 1- La charge concentrée.
- 2- La charge uniformément répartie.

1



2



+

REACTIONS DES APPUIS EN A et B

1

$$\|\bar{A}_1\| = \frac{\|\bar{F}\| \cdot l_2}{l} ; \quad \|\bar{B}_1\| = \frac{\|\bar{F}\| \cdot l_1}{l} \quad +$$

2

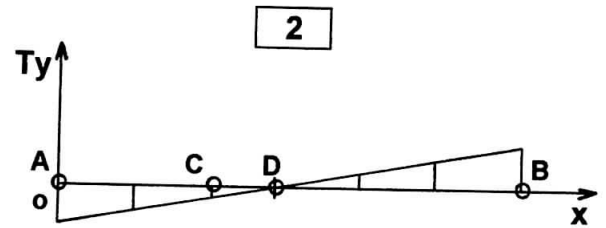
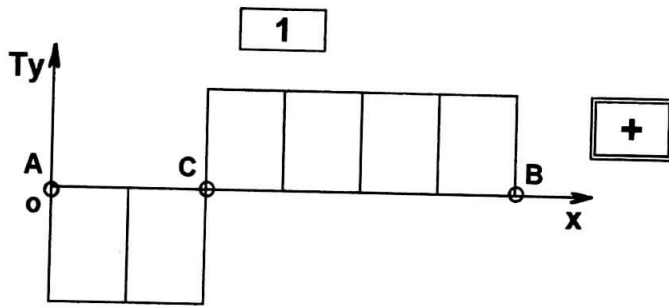
$$\|\bar{A}_2\| = \|\bar{B}_2\| = \frac{p \cdot l}{2}$$

Résultats :

=

$$\|\bar{A}\| = \frac{\|\bar{F}\| \cdot l_2}{l} + \frac{p \cdot l}{2} ; \quad \|\bar{B}\| = \frac{\|\bar{F}\| \cdot l_1}{l} + \frac{p \cdot l}{2}$$

EFFORT TRANCHANT



1

2

De A à C : $Ty_{AC} = -\|\bar{A}_1\|$
(à gauche de C)

De C à B : $Ty_{CB} = -\|\bar{A}_1\| + \|\bar{F}\|$
(C inclus)

De A à B : $Ty = p \cdot x - p \cdot \frac{l}{2}$

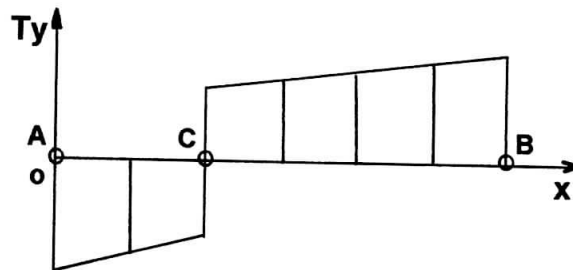
En A : $Ty = -p \cdot \frac{l}{2}$

En C : $Ty = p \cdot l_1 - p \cdot \frac{l}{2}$

En D : $Ty = p \cdot \frac{l}{2} - p \cdot \frac{l}{2} = 0$

En B : $Ty = p \cdot \frac{l}{2}$

Résultats :



En A : $Ty = -\|\bar{A}_1\| - p \cdot \frac{l}{2}$

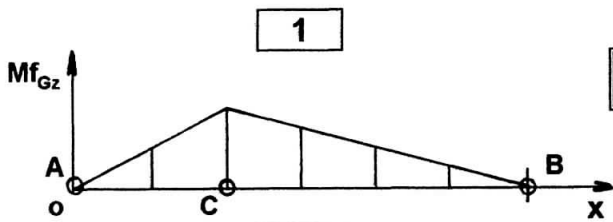
De A à C (à gauche de C) : $Ty_{AC} = -\|\bar{A}_1\| + p \cdot x - p \cdot \frac{l}{2}$

De C à B (C inclus) : $Ty_{CB} = -\|\bar{A}_1\| + \|\bar{F}\| + p \cdot x - p \cdot \frac{l}{2}$

En D : $Ty = -\|\bar{A}_1\| + \|\bar{F}\|$

En B : $Ty = -\|\bar{A}_1\| + \|\bar{F}\| + p \cdot \frac{l}{2}$

MOMENT FLECHISSANT



$$M_{f_{Gz}} = \|\bar{A}_1\| \cdot x - \|\bar{F}\| \cdot (l_1 - x)$$

En A : $M_{f_{Gz}} = 0$

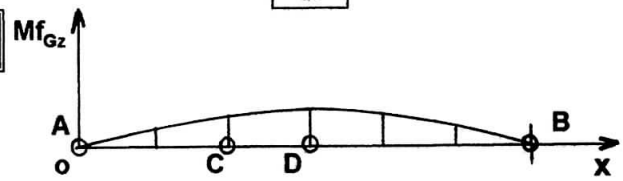
En C : $M_{f_{Gz}} = \|\bar{A}_1\| \cdot l_1$

En B : $M_{f_{Gz}} = 0$

En D : $M_{f_{Gz}} = \|\bar{A}_1\| \cdot \frac{l}{2} - \|\bar{F}\| \cdot (l_1 - \frac{l}{2})$

+

+



$$M_{f_{Gz}} = -p \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{p \cdot l}{2} \cdot x$$

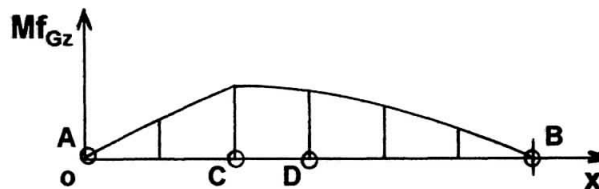
En A : $M_{f_{Gz}} = 0$

En C : $M_{f_{Gz}} = -\frac{p \cdot l_1^2}{2} + \frac{p \cdot l}{2}$

En B : $M_{f_{Gz}} = 0$

En D : $M_{f_{Gz}} = \frac{p \cdot l^2}{8} ; (x = \frac{l}{2})$

Résultats :



En A : $M_{f_{Gz}} = 0$

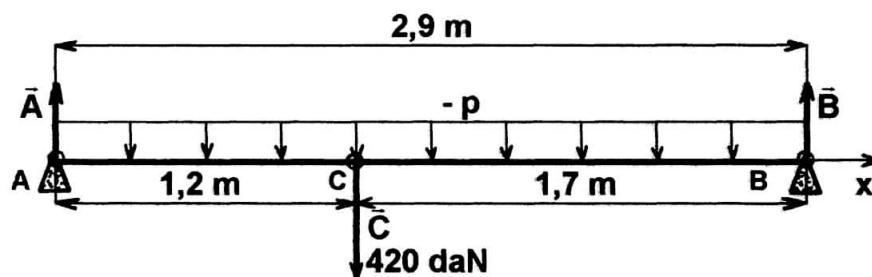
En C : $M_{f_{Gz}} = \|\bar{A}_1\| \cdot l_1 - \frac{p \cdot l_1^2}{2} + \frac{p \cdot l}{2}$

En D : $M_{f_{Gz}} = \|\bar{A}_1\| \cdot \frac{l}{2} - \|\bar{F}\| \cdot (l_1 - \frac{l}{2}) + \frac{p \cdot l^2}{8}$

En B : $M_{f_{Gz}} = 0$

EXEMPLE

A partir du système ci-dessous isolé et modélisé :



Poutre en IPE de 80 ; $m = 6 \text{ kg/m}$.

■ - DETERMINER les actions en A et B :

■ - DETERMINER ET TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y .

- Le diagramme des moments fléchissants $M_{f_{Gz}}$

□ DETERMINATION des actions en A et B :

□ DETERMINATION des efforts tranchants T_y :

Tronçon AC (à gauche de C)

En A : $T_y =$

$T_y =$

A gauche de C : $T_y =$

$T_y =$

Tronçon CB (C inclus)

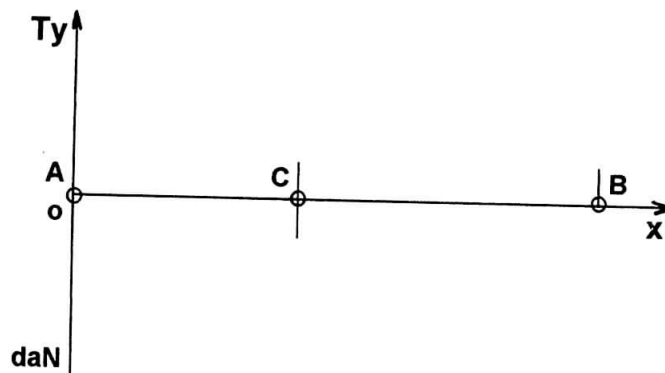
En C : $T_y =$

$T_y =$

En B : $T_y =$

$T_y =$

□ DIAGRAMME des efforts tranchants T_y :



□ DETERMINATION des moments fléchissants Mf_{Gz} :

Tronçon AC

En A : $Mf_{Gz} =$

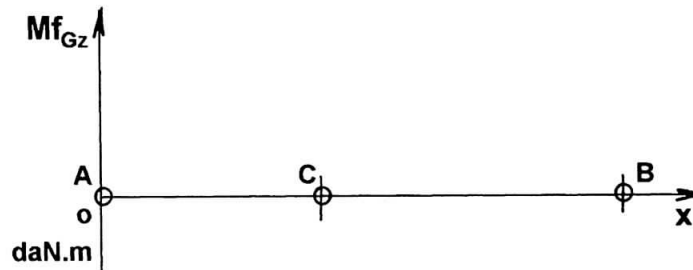
En C : $Mf_{Gz} =$

$Mf_{Gz} =$

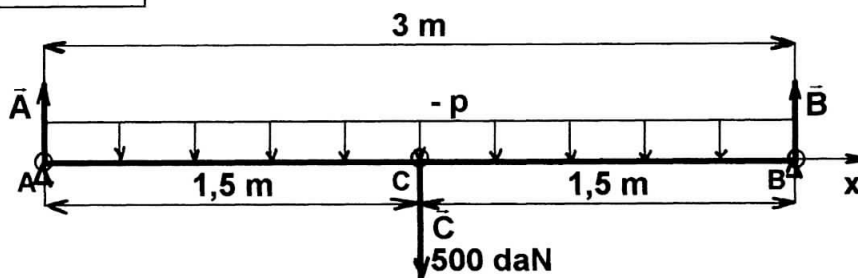
Tronçon CB

En C : $Mf_{Gz} =$

□ DIAGRAMME des moments fléchissants Mf_{Gz} :



APPLICATION



Poutre en IPN 120 ; $m = 11,2 \text{ kg/m}$.

$I_{Gz} = 328 \text{ cm}^4$; $\mu_{Gz} = 54,7 \text{ cm}^3$; $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$; $Re = 160 \text{ N/mm}^2$; $s = 1,5$

■ - DETERMINER les actions en A et B.

■ - DETERMINER et TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants Ty .
- Le diagramme des moments fléchissants Mf_{Gz} .

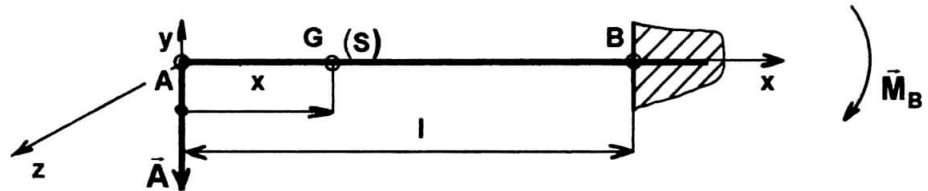
■ - CALCULER si la contrainte de résistance est respectée.

1

LA FLEXION SIMPLE

10. POUTRE ENCASTREE - CHARGE CONCENTREE

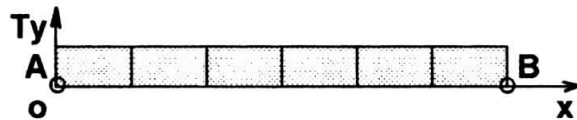
SYSTEME ISOLE ET MODELISE



DETERMINATION DE \vec{B} et \vec{M}_B à l'encastrement en B

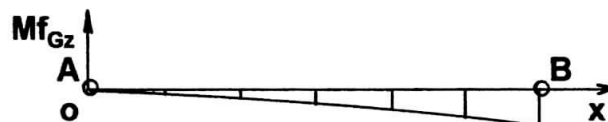
$$\|\vec{B}\| = \|\vec{A}\| \quad ; \quad M_B = -\|\vec{A}\| \cdot l$$

EFFORT TRANCHANT



$$\text{De A à B : } T_y = +\|\vec{A}\|$$

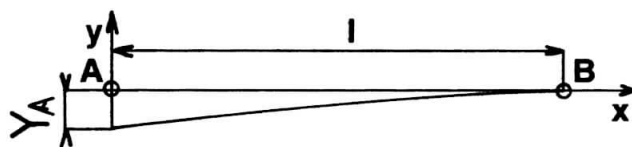
MOMENT DE FLEXION



$$M_{Gz} = -\|\vec{A}\| \cdot x$$

$$M_{Gz \text{ Maxi en B}} : M_{Gz} = -\|\vec{A}\| \cdot l$$

DEFORMATION (Flèche)



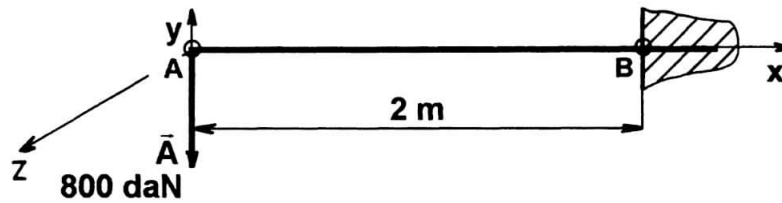
$$\text{Flèche Maxi en A : } Y_A = -\frac{\|\vec{A}\| \cdot l^3}{3E \cdot I_{Gz}}$$

EXEMPLE

Hypothèses simplificatrices :

- Le poids de la poutre est négligé.
- Poutre en IPN de 140.

Systeme isolé et modélisé.



- - DETERMINER \vec{B} et \vec{M}_B à l'encastrement en B.
- - DETERMINER et TRACER:
 - Le diagramme des efforts tranchants T_y .
 - Le diagramme des moments de flexion M_{Gz} .

□ - DETERMINATION de \vec{B} et \vec{M}_B :

□ - DETERMINATION des efforts tranchants T_y :

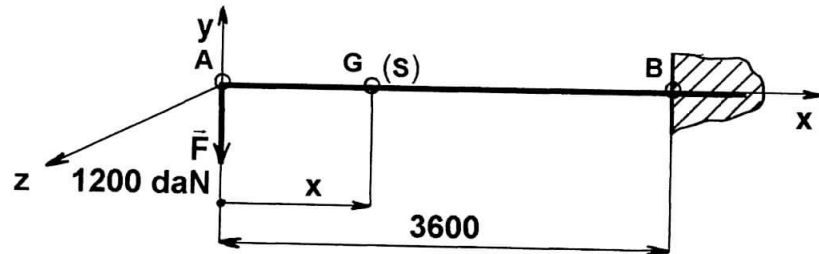
□ - DETERMINATION des moments de flexion M_{Gz} :

APPLICATION

Une poutre horizontale encastrée à une extrémité, supporte une charge concentrée.

- La section de la poutre est constante.
- Le poids de cette poutre est négligée.

Système isolé et modélisé.



- DETERMINER \vec{B} et \vec{M}_B à l'encastrement en B :
- DETERMINER et TRACER :
 - Le diagramme des efforts tranchants T_y .
 - Le diagramme des moments de flexion M_{Gz} .

La poutre est de section circulaire :

$$R_{pe} = 180 \text{ N/mm}^2 ; E = 20000 \text{ daN/mm}^2$$

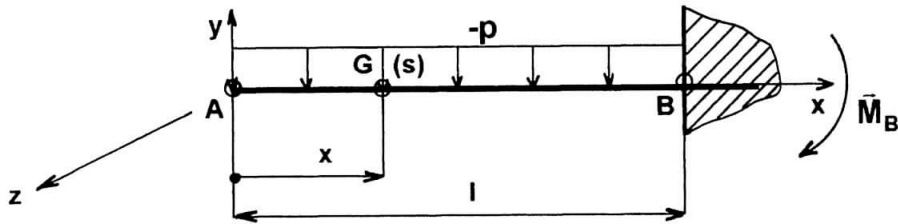
- DETERMINER le diamètre de la poutre d .
- DETERMINER la déformation maximale Y_A .

1

LA FLEXION SIMPLE

11. POUTRE ENCASTREE CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE

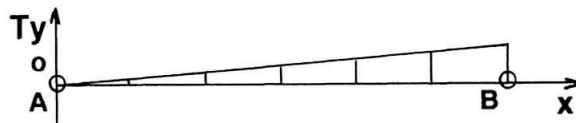
SYSTEME ISOLE ET MODELISE



DETERMINATION DE \bar{B} et \bar{M}_B à l'encastrement en B

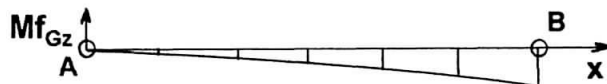
$$\|\bar{B}\| = p \cdot l \quad ; \quad M_B = -\frac{p \cdot l^2}{2}$$

EFFORT TRANCHANT



$$T_y = p \cdot x \quad ; \quad T_{y_{\text{Maxi}}} = p \cdot l$$

MOMENT DE FLEXION



$$M_{f_{Gz}} = -\frac{p \cdot x^2}{2} \quad ; \quad M_{f_{Gz_{\text{Maxi}}}} \text{ en B : } M_{f_{Gz}} = -\frac{p \cdot l^2}{2}$$

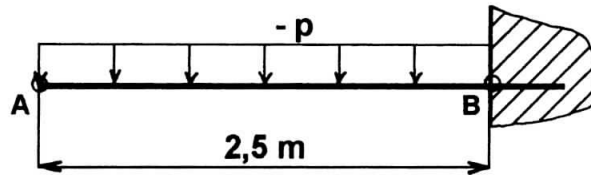
DEFORMATION



$$Y_A = -\frac{p \cdot l^4}{8E \cdot I_{Gz}}$$

EXEMPLE

Systeme isolé et modélisé.



La poutre est soumise à son propre poids.
Poutre en IPN de 120. Masse linéique = 11,2 kg/m.

- - DETERMINER \vec{B} et \vec{M}_B à l'encastrement en B :
- - DETERMINER et TRACER :
 - Le diagramme des efforts tranchants T_y .
 - Le diagramme des moments de flexion $M_{f_{Gz}}$.

□ - DETERMINATION de \vec{B} et \vec{M}_B

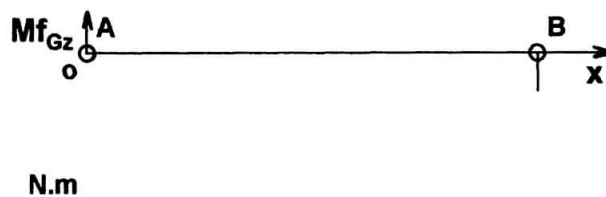
□ - DETERMINATION des efforts tranchants T_y :

□ - DIAGRAMME des efforts tranchants T_y :



□- DETERMINATION des moments de flexion M_{Gz} :

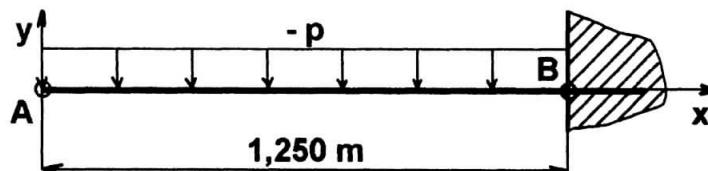
□- DIAGRAMME des moments de flexion M_{Gz} :



APPLICATION

Poutre en T de $60 \times 60 \times 7$; $m = 6,23 \text{ kg/m}$; $I_{Gz} = 23,8 \text{ cm}^4$; $E = 20000 \text{ daN/mm}^2$.

A partir du système ci-dessous isolé et modélisé :



■- DETERMINER \bar{B} et \bar{M}_B à l'encastrement en B :

■- DETERMINER et TRACER :

- Le diagramme des efforts tranchants T_y .
- Le diagramme des moments de flexion M_{Gz} .

■- DETERMINER la déformation Y_A :

1

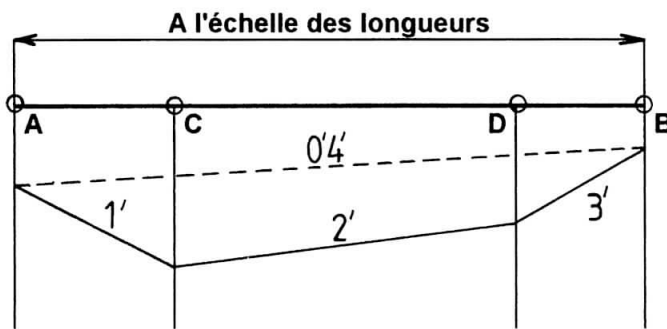
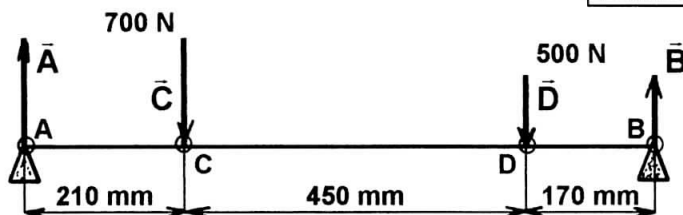
LA FLEXION SIMPLE

12. CHARGES CONCENTREES SUR 2 APPUIS UTILISATION DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

DETERMINATION GRAPHIQUE DES ACTIONS - Rappel

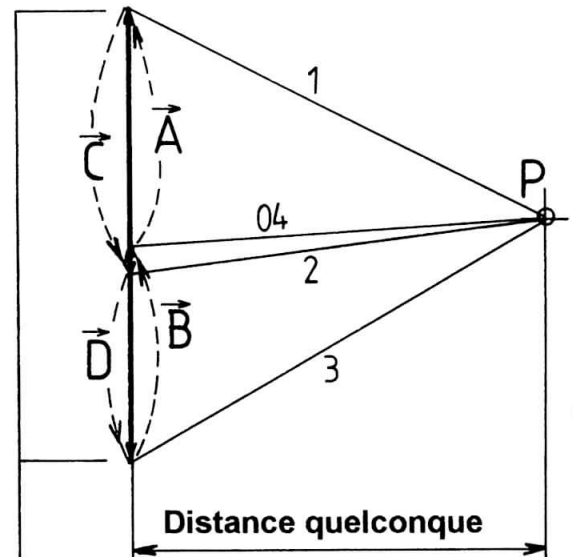
Echelle des longueurs 1 mm \Rightarrow 10 mm
Echelle des actions 1 mm \Rightarrow 20 N

Repérage :	\vec{A}	+	\vec{C}	+	\vec{D}	+	\vec{B}	=	$\vec{0}$
Dynamique	$0\vec{1}$	+	$1\vec{2}$	+	$2\vec{3}$	+	$3\vec{4}$	=	$0\vec{4}$
Funiculaire	$0'$		$1'$		$2'$		$3'$		$4'$



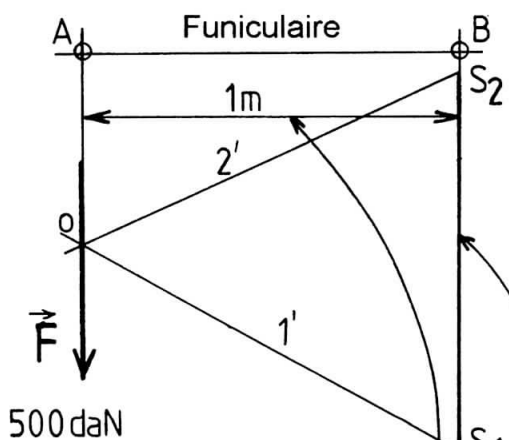
$$\|\vec{A}\| = 630 \text{ N}$$

$$\|\vec{B}\| = 570 \text{ N}$$



A l'échelle des actions

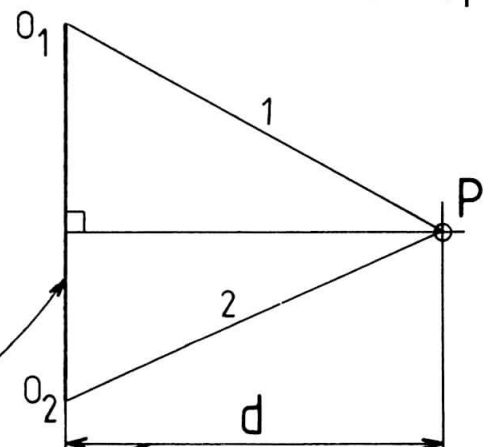
DETERMINATION GRAPHIQUE DU MOMENT D'UNE FORCE



Echelle des longueurs 1 mm \Rightarrow 20 mm
Echelle des actions 1 mm \Rightarrow 10 daN

Dynamique

$$\vec{F} = \vec{O_1 O_2}$$



Par définition :

$$M_B(\vec{F}) = +F \cdot AB$$

A partir des triangles semblables OS_1S_2 et PO_1O_2 la relation $\frac{d}{AB} = \frac{O_1O_2}{S_1S_2}$

est toujours vérifiée : $\Rightarrow S_1S_2 \cdot d = O_1O_2 \cdot AB$

$$M_B(\vec{F}) = S_1S_2 \cdot d$$

On mesure :

S_1S_2 à l'échelle des longueurs (1 mm \Rightarrow 20 mm) ; $S_1S_2 = 50 \times 20 = 1000 \text{ mm} \Rightarrow 1 \text{ m}$

d à l'échelle des actions (1 mm \Rightarrow 10 daN) ; $d = 50 \times 10 = 500 \text{ daN}$

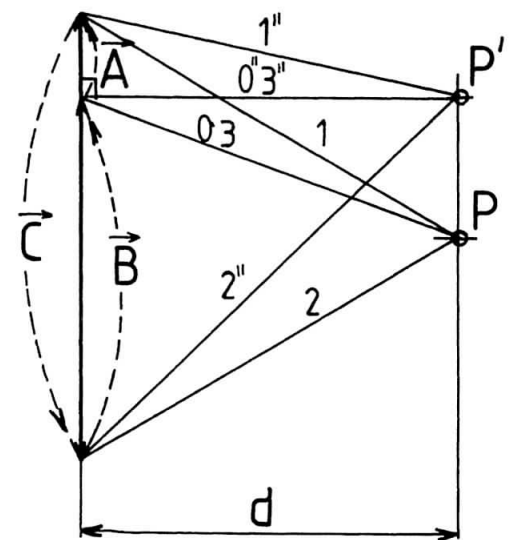
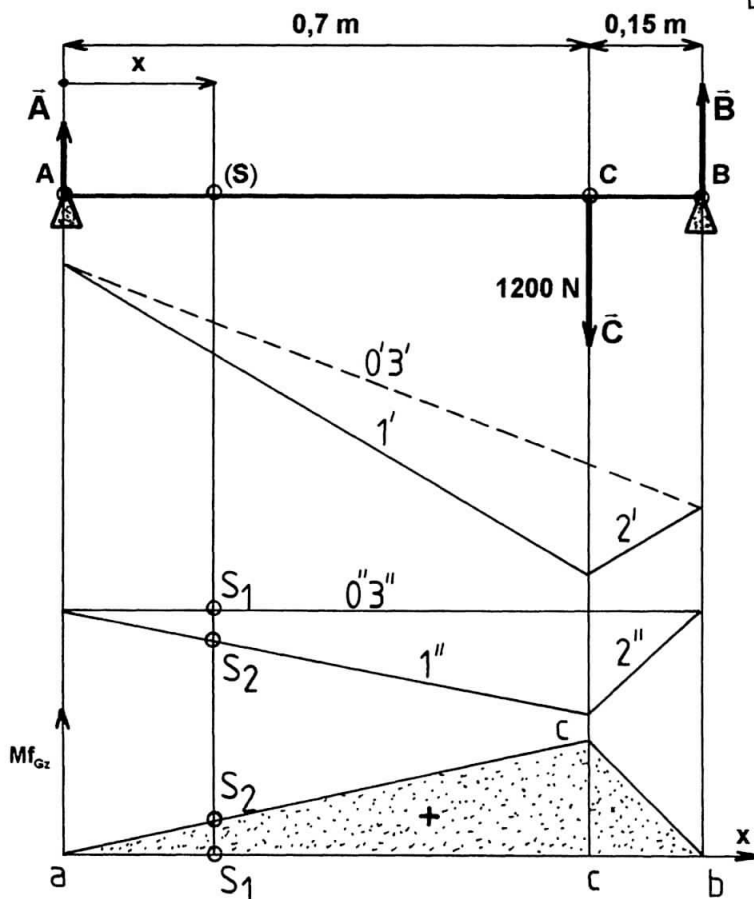
$$M_B(\vec{F}) = 1 \cdot 500 = 500 \text{ daN.m}$$

⊗ Le signe du moment dépend de la direction de S_1S_2 (dans ce cas *positif*).

DETERMINATION DU MOMENT FLECHISSANT

- 1°- **DESSINER** la poutre (en se fixant une échelle des longueurs).
- 2°- **TRACER** le dynamique et la distance polaire d (à l'échelle des actions).
- 3°- **TRACER** le funiculaire et **COMPLÉTER** le dynamique pour déterminer les actions \vec{A} et \vec{B} .
- 4°- **PRENDRE** sur le dynamique un nouveau pôle P' tel que $PP' \parallel$ à \vec{C} en ramenant $O3$ en ($0''3''$) **perpendiculaire** à $\vec{C} \Rightarrow P'$.
- 5°- **TRACER** sur le funiculaire le nouveau diagramme, puis par **symétrie RETRACER** le diagramme suivant le sens Mf_{Oz}^+

Echelle des longueurs 1 mm \Rightarrow 0,01 m
Echelle des actions 1 mm \Rightarrow 20 N



Sachant par définition que :

$$\mathbf{Mf}_{Gz} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{d}$$

Le funiculaire **abc** est le graphe des moments fléchissants.

$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$: Segment limité par la ligne de fermeture et le côté du funiculaire, au droit de la section (**s**).

- Mené parallèle à la direction des actions.
- **MESURE** à l'échelle des *longueurs*.

d : Distance polaire.

- **MESUREE** à l'échelle des *actions*.

$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{d}$ nous donne le moment fléchissant de la section (**s**).

MOMENTS FLECHISSANTS

En A

$$\mathbf{Mf}_{Gz} = 0$$

En C

$$\mathbf{Mf}_{Gz} = (15 \times 0,01) \times (50 \times 20) = 150\text{N.m}$$

En B

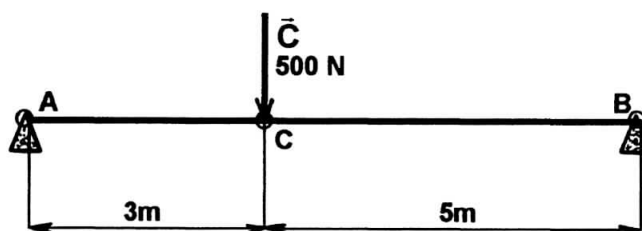
$$\mathbf{Mf}_{Gz} = 0$$

APPLICATION

A partir du système ci-dessous, isolé et modélisé :

■ - DETERMINER :

- Graphiquement les réactions de contact en **A** et **B**
- Graphiquement le diagramme des moments fléchissants \mathbf{Mf}_{Gz}

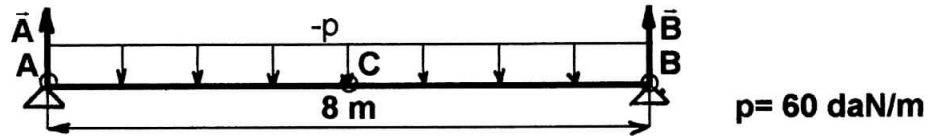


1

LA FLEXION SIMPLE

13. POUTRE SUR 2 APPUIS - CHARGE REPARTIE UTILISATION DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

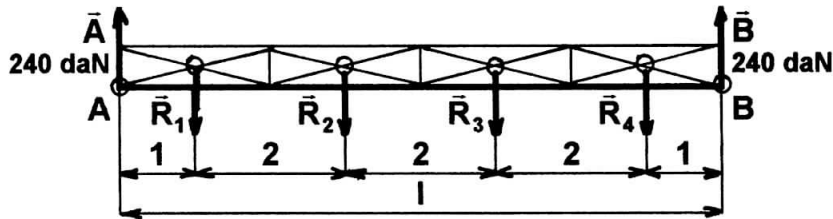
SYSTEME ISOLE ET MODELISE



REACTIONS DES APPUIS EN A et B

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \frac{p \cdot l}{2} = \frac{60 \times 8}{2} = 240 \text{ daN}$$

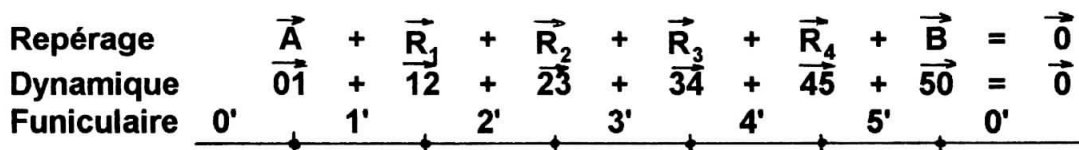
Nous divisons dans ce cas la poutre en 4 tronçons.

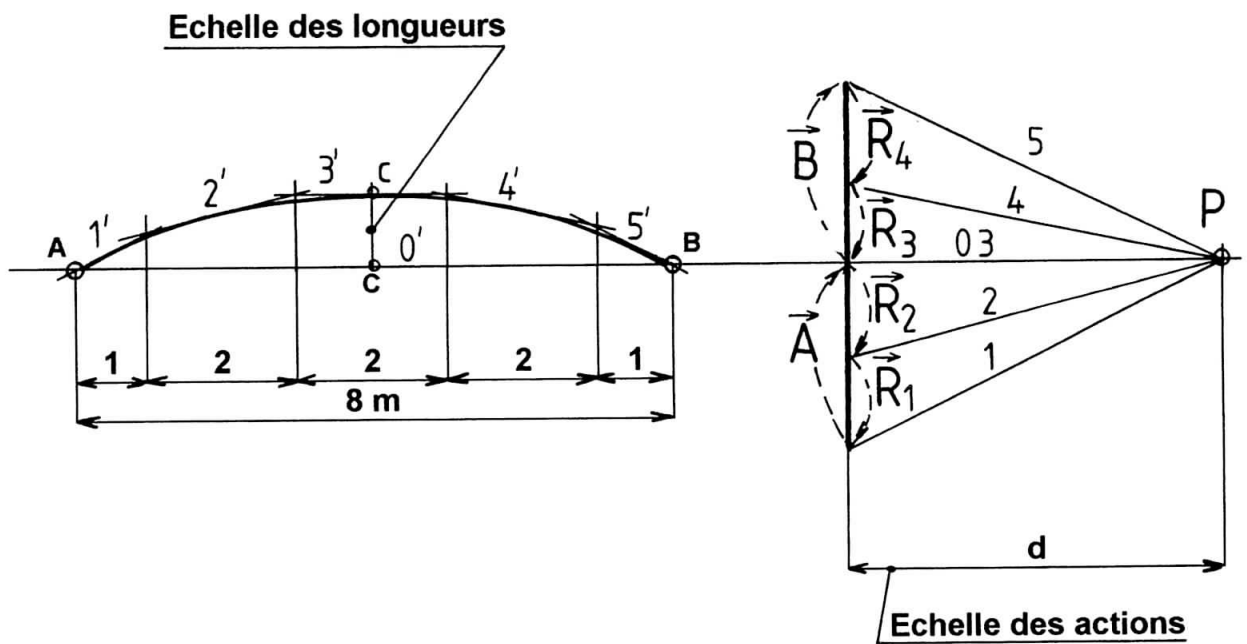


$$\|\vec{R}_1\| = \|\vec{R}_2\| = \|\vec{R}_3\| = \|\vec{R}_4\| = \frac{p \cdot l}{4} = 120 \text{ daN}$$

DETERMINATION DU MOMENT FLECHISSANT

Echelle des longueurs: 1mm \Rightarrow 0,1m
Echelle des forces: 1mm \Rightarrow 10 daN



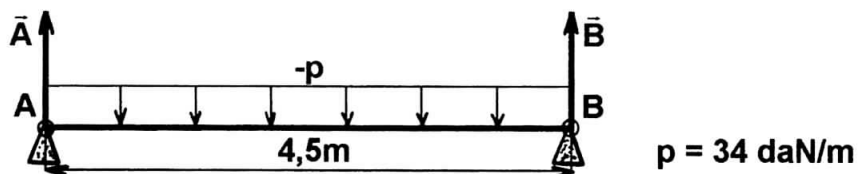


$$Mf_{GzMaxi} = (CC' \times 0,1) \times (d \times 10) = (9,5 \times 0,1) \times (50 \times 10) = 475 \text{ daN.m}$$

APPLICATION

A partir du système ci-dessous isolé et modélisé :

- **DETERMINER** par le calcul les actions en **A** et **B**.
- **DETERMINER** graphiquement le diagramme du moment de flexion et Mf_{GzMaxi} .

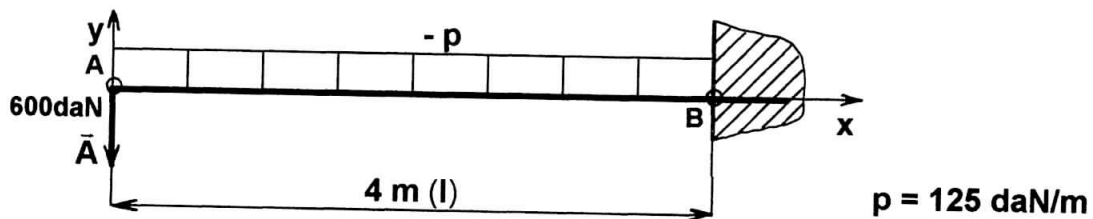


1

LA FLEXION SIMPLE

14. POUTRE ENCASTREE - CHARGE CONCENTREE
et CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE
UTILISATION DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

SYSTEME ISOLE ET MODELISE



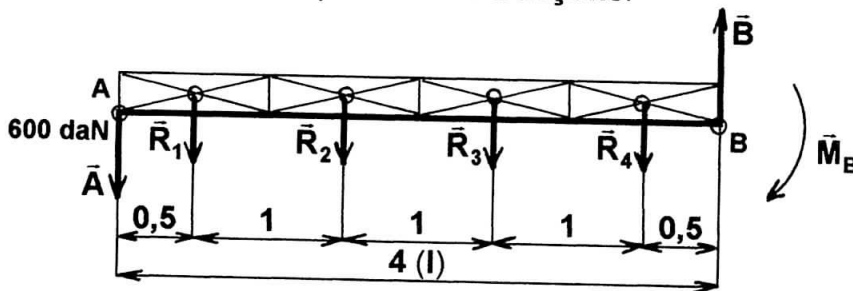
DETERMINATION DE \vec{B} et \vec{M}_B à l'encastrement en B

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{A}\| + (p \cdot l)$$

$$M_B = -\|\vec{A}\| \cdot l - \frac{p \cdot l^2}{2}$$

DETERMINATION DU MOMENT FLECHISSANT

Nous divisons dans ce cas la poutre en 4 tronçons.

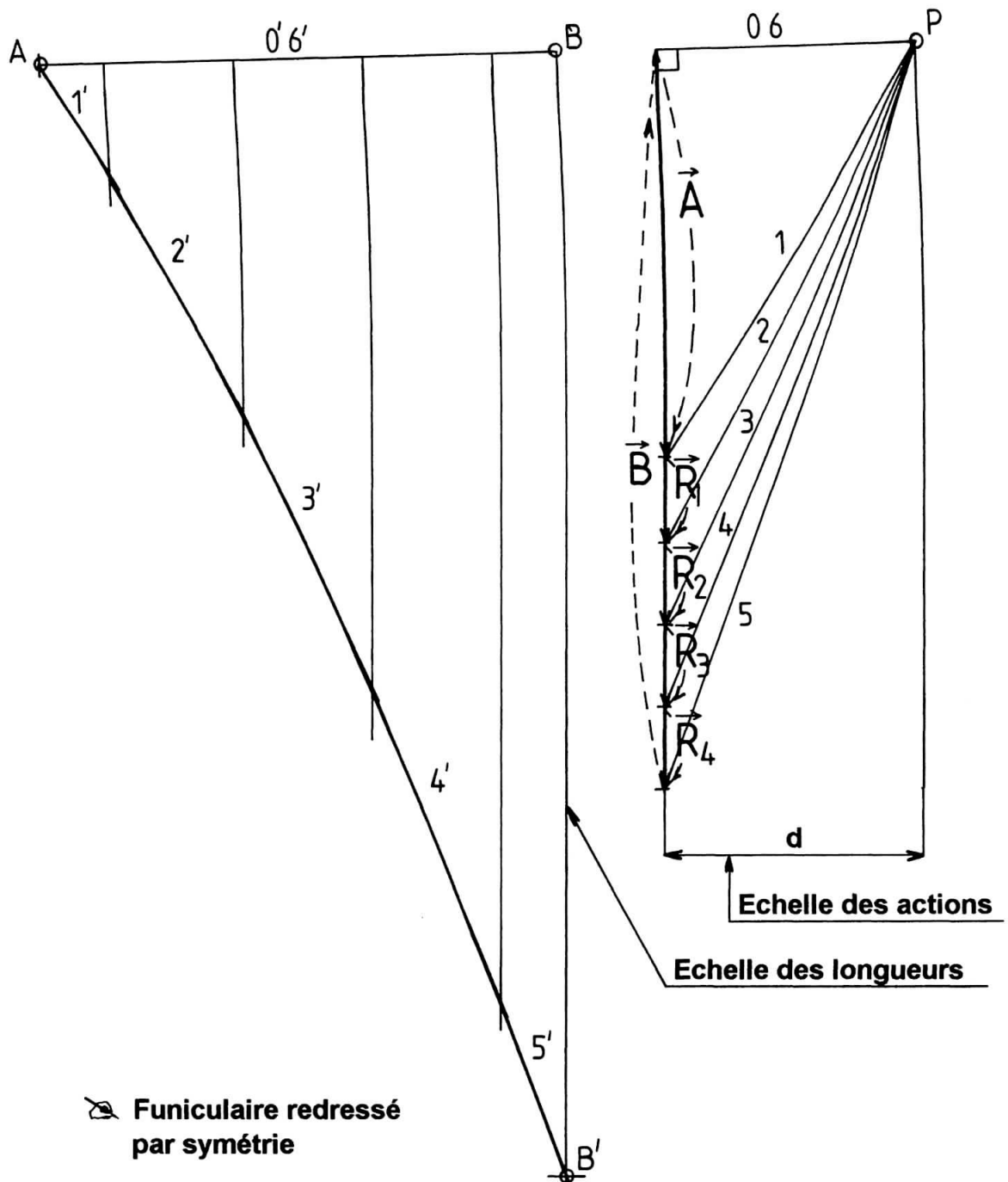


$$\|\vec{R}_1\| = \|\vec{R}_2\| = \|\vec{R}_3\| = \|\vec{R}_4\| = \frac{p \cdot l}{4} = \frac{125 \cdot 4}{4} = 125 \text{ daN}$$

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{A}\| + \|\vec{R}_1\| + \|\vec{R}_2\| + \|\vec{R}_3\| + \|\vec{R}_4\| = 600 + (125 \times 4) = 1100 \text{ daN}$$

Echelle des longueurs : 1mm \Rightarrow 0,05m - Echelle des actions : 1mm \Rightarrow 10daN

Repérage	\vec{A}	+	\vec{R}_1	+	\vec{R}_2	+	\vec{R}_3	+	\vec{R}_4	+	\vec{B}	=	$\vec{0}$
Dynamique	01		12		23		34		45		50		0
Funiculaire	0'		1'		2'		3'		4'		5'		0'



$$Mf_{GzMaxi} = (BB' \times 0,05) \times (d \times 10) = (170 \times 0,05) \times (40 \times 10) = 3400 \text{ daN.m}$$

APPLICATION

A partir du système ci-dessous isolé et modélisé :

- DETERMINER par le calcul \bar{B} et \bar{M}_B à l'encastrement en B :
- DETERMINER graphiquement le diagramme du moment de flexion et Mf_{GzMaxi} .

